

## Otimização de vigas trapezoidais de concreto armado submetidas a flexão simples

## Optimization of trapezoidal reinforced concrete beams subjected to simple bending

### RESUMO

Nyuana Victoria Pietrobon  
[nyuanap@alunos.utfpr.edu.br](mailto:nyuanap@alunos.utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

Leandro Waidemam  
[waidemam@utfpr.edu.br](mailto:waidemam@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

Tatiane Cazarin da Silva  
[tatianecazarin@utfpr.edu.br](mailto:tatianecazarin@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

Este trabalho tem como objetivo apresentar um algoritmo computacional que retorne as dimensões e áreas de aço longitudinais de seções transversais trapezoidais de vigas de concreto armado sujeitas a flexão simples, de maneira otimizada em termos de custo de materiais e execução, respeitando-se o estabelecido pela norma ABNT NBR 6118:2014. Para a implementação computacional do algoritmo foi utilizado o software MATLAB e a função `fmincon` presente em sua biblioteca de otimização. Para os custos individuais de concreto, aço e fôrma, foi consultada a tabela SINAPI – Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil, região de Curitiba e data de referência técnica em 15 de agosto de 2020. Os resultados mostram-se significativos no contexto da otimização do estrutural e demonstram a contribuição individual dos custos dos materiais na composição do custo final de vigas trapezoidais de concreto armado.

**PALAVRAS-CHAVE:** Otimização estrutural. Vigas de concreto. Algoritmos computacionais.

### ABSTRACT

This paper aims to present a computational algorithm that returns the dimensions and longitudinal steel areas of trapezoidal transversal sections of reinforced concrete beams subject to simple bending, in an optimized manner in terms of material and execution cost, respecting the established by ABNT standard NBR 6118:2014. For the computational implementation of the algorithm, MATLAB software and the `fmincon` function present in its optimization library were used. For the individual costs of concrete, steel and formwork, the table SINAPI – National System of Research of Costs and Indices of Civil Construction, region of Curitiba and date of technical reference on August 15, 2020, was consulted. The results are significant despite in structural optimization context and demonstrate the individual contribution of material costs in the final cost composition of trapezoidal reinforced concrete beams.

**KEYWORDS:** Structural optimization. Concrete beams. Computational algorithms.

**Recebido:** 19 ago. 2020.

**Aprovado:** 01 out. 2020.

**Direito autoral:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

Numerosas decisões tomadas no dia a dia dependem de um valor máximo ou mínimo respeitando variáveis e limitações. Os responsáveis por tais decisões se veem confundidos diante de tantas possibilidades de combinações e soluções despendendo energia para realizar a escolha ideal, levando em consideração o melhor custo-benefício. Neste sentido, a otimização é uma técnica matemática que pode ser adequada e aplicável a situações reais de modo a auxiliar e contornar casos como o supracitado.

O início dos anos 2000 consagrou o processo de otimização como de vital importância para a busca de novos paradigmas nos projetos de engenharia. O trabalho dos engenheiros não se limitou apenas a superar barreiras, mas fazê-lo de forma mais eficiente possível (TANCREDI, 2008).

Ainda sobre a perspectiva de Tancredi (2008), motivados pelo crescente avanço e pela redução dos custos dos recursos computacionais, a busca por metodologias e algoritmos de otimização tem se intensificado.

Nesse contexto tecnológico, os softwares matemáticos têm-se destacado como um excelente guia até a solução ótima e, assim, têm se apresentado como aliados dos engenheiros que querem potencializar seus resultados e destacar-se diante à crescente concorrência.

Em particular, o mercado da construção civil tem buscado profissionais que atendam uma maior demanda de projetos com mais eficiência, já que estarão providos de ferramentas matemáticas que agilizarão o atendimento às exigências de desempenho e segurança. Este recurso é benéfico também aos executores do projeto, pois trabalharão com estruturas padronizadas. Além disso, os usuários terão seu produto entregue com um menor custo, resultante da economia de materiais, e maior garantia, resultante da automatização do processo.

Dentro desse contexto, este trabalho objetiva analisar vigas trapezoidais de concreto armado sujeitas a flexão simples sob a ótica da otimização matemática, especialmente aplicada na busca pela seção transversal ótima, sob o ponto de vista econômico.

## DEFINIÇÃO DO PROBLEMA MATEMÁTICO

O problema de otimização da seção transversal de vigas trapezoidais de concreto armado, sujeito às restrições estabelecidas pela ABNT 6118:2014 e apresentado na sequência.

Minimizar

$$F(b_w, b_f, h, A_s, A'_s) = \frac{(b_f + b_w) \cdot h}{2} \cdot C_C + (A_s + A'_s) \cdot \rho_s \cdot C_s + \left( b_w + 2 \cdot \sqrt{\frac{(b_f - b_w)^2}{4} + h^2} \right) \cdot C_F \quad (1)$$

sujeito a

$$A_S \cdot \sigma_{sd} - A'_S \cdot \sigma'_{sd} - 2 \cdot \left[ \left( \frac{b_f - b_w(y)}{4} \right) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \right] + b_w(y) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} = 0 \quad (2)$$

$$M_d = (A'_S \cdot \sigma'_{sd}) \cdot (d - d') + 2 \cdot \left( \frac{b_f - b_w(y)}{4} \right) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot z_1 + b_w(y) \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot z_2 \quad (3)$$

$$z_1 = z_3 = d - \frac{0,8 \cdot x}{3} \quad (4)$$

$$z_2 = d - \frac{0,8 \cdot x}{2} \quad (5)$$

$$b_w(y) = b_f - (0,8 \cdot x) \cdot \left( \frac{b_f - b_w}{h} \right) \quad (6)$$

$$\frac{x}{d} \leq 0,45 \quad (7)$$

$$b_w > 12 \text{ cm} \quad (8)$$

$$\frac{l}{h} \geq 2 \quad (9)$$

$$A_S \geq \rho_{MÍN} \cdot A_C \quad (10)$$

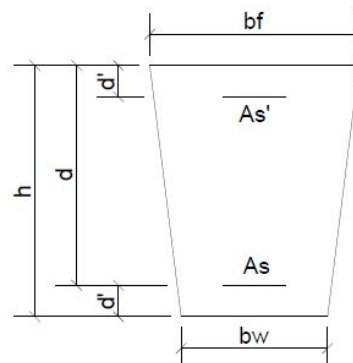
$$A_S + A'_S \leq 4\% \cdot A_C \quad (11)$$

$$b_f \geq \frac{l_0}{50} \quad (12)$$

$$b_f \geq \beta_{fl} \cdot h \quad (13)$$

sendo  $F$  a função de custo da viga, por unidade de comprimento;  $C_C$ ,  $C_S$  e  $C_F$  são os custos individuais do concreto (por unidade de volume), aço (por unidade de massa) e fôrma (por unidade de área), respectivamente;  $\rho_S$  é a massa específica do aço;  $A_S$  a área de armadura tracionada na seção da viga;  $A'_S$  a armadura comprimida da seção da viga;  $\sigma_{sd}$  a tensão de cálculo na armadura tracionada;  $\sigma'_{sd}$  a tensão de cálculo na armadura comprimida;  $x$  a profundidade da linha neutra;  $M_d$  é o momento de cálculo atuante na seção transversal da viga;  $l_0$  é o comprimento do flange comprimido e  $\beta_{fl}$  é o coeficiente dependente da forma da viga. As demais variáveis estão apresentadas na Figura 1.

Figura 1 – Seção transversal de uma viga trapezoidal



Fonte: Adaptada de Corelhan (2018).

## METODOLOGIA

Para alcançar o menor custo de produção da viga de concreto armado de seção transversal trapezoidal algumas etapas foram realizadas.

A princípio foi definida a função custo, que corresponde a função a ser minimizada neste trabalho. A partir desta, foi exposto as variáveis que servirão de parâmetros para encontrar o custo de produção da viga de concreto armado da seção em pauta e que serão computadas no programa implementado.

Posteriormente, foram definidas, a partir da ABNT NBR 6118:2014, limitações que se aplicam à viga de concreto armado de seção transversal trapezoidal, a fim de implementar as equações e inequações de restrição e dimensões mínimas no algoritmo computacional, de maneira a respeitar o estabelecido pela norma.

A seção transversal ótima é obtida através de uma solução iterativa, criando estimativas refinadas até encontrar a solução apropriada. Para a obtenção da seção ótima, o problema matemático foi implementado no software Matlab com o auxílio de sua biblioteca de otimização e da rotina de fmincon, utilizando o método dos pontos interiores como algoritmo de minimização. Foram utilizadas as seguintes configurações: número máximo de avaliações de funções (30000), número máximo de iterações (10000) e tolerância mínima (1e-10).

Para finalizar, os custos individuais de concreto, aço e fôrma foram definidos a partir da tabela SINAPI – Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil, região de Curitiba e data de referência técnica em 15 de agosto de 2020.

Para os gastos com concreto, foi adotado o valor de R\$347,68/m<sup>3</sup> encontrado no item “concretagem de vigas e lajes com fck de 20 MPa, para lajes maciças ou nervuradas com uso de bomba em edificação com área média de lajes maior que 20 m<sup>2</sup> - lançamento, adensamento e acabamento”.

Já para o custo do aço, foi empregado o item “armação de pilar ou viga de uma estrutura convencional de concreto armado em um edifício de múltiplos pavimentos utilizando aço CA-50 - montagem”, porém devido ao custo variar em função dos diâmetros, sendo o menor 6,3 mm e o maior 25,0 mm, houve a necessidade de calcular a média entre os valores apresentados, obtendo o custo de R\$6,63/kg.

Em se tratando das fôrmas, o item “montagem e desmontagem de forma de viga, escoramento com pontalete de madeira, pé-direito simples, em madeira serrada, 4 utilizações” apresenta o valor de R\$87,91/m<sup>2</sup>.

## RESULTADOS

Os resultados a seguir são referentes a simulações numéricas realizadas em uma viga biapoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído em todo o seu comprimento. A Tabela 1 apresenta os parâmetros de entrada.

Tabela 1 – Parâmetros de entrada

Parâmetro	Valor atribuído
L	6 m
$f_{ck}$	20 MPa
$E_s$	210000 MPa
Tipo de aço	CA-50
$\rho_s$	7859 Kg/m <sup>3</sup>
$f_{yk}$	500 MPa
d'	3 cm

Fonte: Autoria própria (2020)

O estudo foi realizado a partir da variação do momento solicitante de cálculo, sendo que, para cada valor atribuído, foi obtido como retorno os valores das variáveis de projeto e também o custo da seção otimizada. Os resultados obtidos para  $M_d \leq 500\text{kN.m}$  são apresentados no Quadro 1.

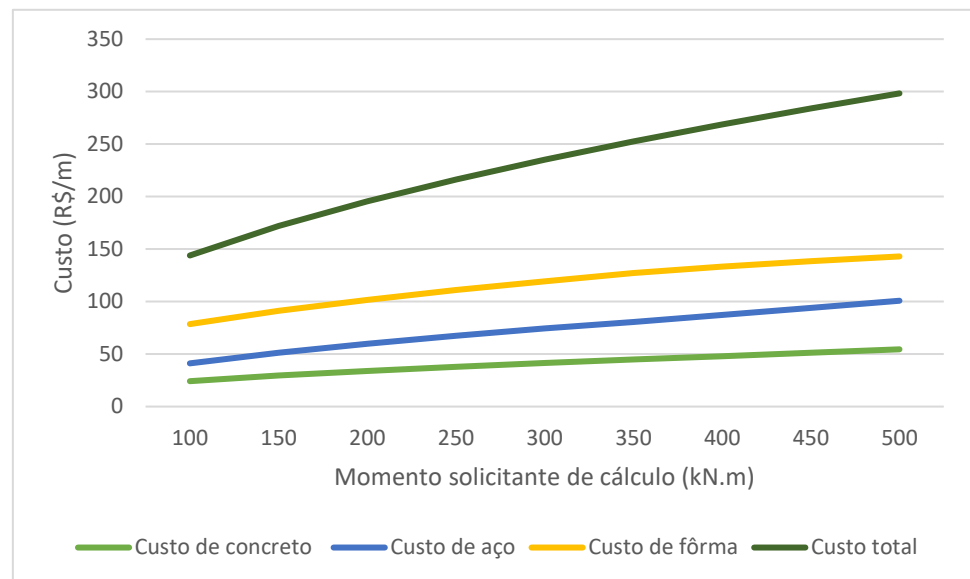
Quadro 1 – Variáveis otimizadas.

Md (kN.m)	$b_f$ (cm)	$b_w$ (cm)	d (cm)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$A_s'$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura total (cm <sup>2</sup> )	Custo (R\$/m)
100	24,45	12	35,18	7,91	2,37e-07	7,91	143,98
150	25,44	12	42,33	9,87	2,34e-07	9,87	171,99
200	26,07	12	48,35	11,52	2,33e-07	11,52	195,61
250	26,52	12	53,65	12,97	4,63e-06	12,97	216,42
300	26,85	12	58,45	14,29	4,62e-08	14,29	235,24
350	27,12	12	62,86	15,50	4,61e-08	15,50	252,55
400	27,78	12	66,46	16,75	2,24e-05	16,75	268,67
450	28,89	12	69,23	18,08	4,26e-08	18,08	283,87
500	29,92	12	71,81	19,37	2,04e-05	19,37	298,33

Fonte: Autoria própria (2020).

A figura 2 apresenta, para cada momento de cálculo, os custos individuais de concreto, aço, fôrma e custo total da viga de concreto armado trapezoidal otimizada.

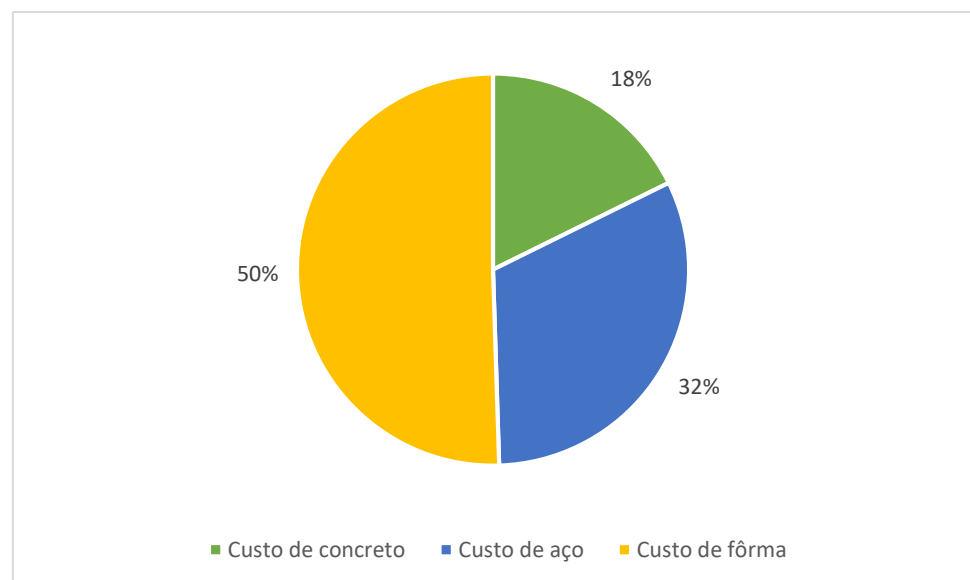
Figura 2 – Custos individuais e total.



Fonte: Autoria própria (2020)

Na figura 3, são apresentadas percentualmente a contribuição de cada material no custo total das vigas em análise. Os dados foram obtidos através do cálculo do valor médio para os dados apresentados no Quadro 1.

Figura 3 – Percentual de contribuição no custo total por material.



Fonte: Autoria própria (2020)

A figura 3 mostra a relevância do custo da forma no custo final das vigas simuladas, influenciando diretamente na viabilidade da geometria estudada.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados apresentados permitem concluir que o algoritmo proposto se mostrou eficiente para aplicação no problema apresentado, sendo capaz de encontrar pontos de mínimo local para a função objetivo, satisfazendo as restrições e atendendo aos critérios de parada.

Em se tratando dos custos de produção do elemento estrutural, pode-se concluir que o aumento que ocorre no custo total não é proporcional a variação do momento solicitante de cálculo. Ou seja, um aumento no momento solicitante não exige a mesma variação nos componentes da viga. O aço é o elemento que mais se aproxima de manter a proporcionalidade, em contrapartida, com um aumento de cinco vezes no momento de cálculo solicitante, o custo de fôrma apenas dobra.

Quanto aos custos individuais, os dados apresentados no trabalho mostram o custo elevado de fôrma na execução das vigas trapezoidais de concreto armado, apesar da consideração de reutilização da mesma. Com essa informação, pode também ser estudada a viabilidade de utilização de formas feitas com outros materiais substituindo a madeira, permitindo a reutilização do componente por mais vezes e trazendo maior economia para a execução do projeto.

## REFERÊNCIAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto: Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

CORELHANO, A. G. B. Flexão Simples para vigas de concreto armado curso semestral 01/2019. Notas de Aula.

SINAPI – Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil. Caixa Economica Federal, Curitiba, Agosto, 2020.

TANCREDI, T. P. Otimização Multidisciplinar Distribuída aplicada a Projetos de Engenharia. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.