

Estudo numérico de um modelo de infiltração de água

Numerical study of a water infiltration model

RESUMO

Matheus Augusto da Rosa
Matheus.0275@outlook.com
Universidade Tecnológica Federal
do Paraná, Apucarana, Paraná,
Brasil

Juliana Castanon Xavier
julianaxavier@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal
do Paraná, Apucarana, Paraná,
Brasil

Neste trabalho realiza-se o estudo numérico da equação de Richards. O objetivo é determinar a carga gerada pela pressão da água no solo em posições e tempos pré-determinados do modelo de infiltração horizontal da equação. Utiliza-se o método de diferenças finitas, que a partir de aproximações das derivadas, decorrentes da expansão de funções em séries de Taylor, transformam uma EDP em um sistema de equações algébricas. Aplicam-se aproximações progressivas e centradas para as derivadas temporal e espacial da equação de Richards, respectivamente. O código computacional desenvolvido é implementado no software Scilab. As simulações numéricas tem como objetivos validar o método numérico proposto e visualizar graficamente a carga de pressão distribuída no perfil do solo durante a infiltração.

PALAVRAS-CHAVE: Diferenças finitas. Equações diferenciais parciais. Solos.

ABSTRACT

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



In this work, the numerical study of the Richards equation is carried out. The objective is to determine the load generated by the water pressure in the soil at predetermined positions and times of the horizontal infiltration model of the equation. The finite difference method is used, which, from approximations of the derivatives, resulting from the expansion of functions in Taylor series, transform an EDP into a system of algebraic equations. Progressive and centered approximations are applied to the temporal and spatial derivatives of the Richards equation, respectively. The computational code developed is implemented in Scilab. The numerical simulations aim to validate the proposed numerical method and graphically visualize the pressure load distributed in the soil profile during the infiltration.

KEYWORDS: Finite Difference. Partial Differential Equations. Soil.

INTRODUÇÃO

A análise de propriedades físicas do solo é de extremo interesse para várias áreas da ciência, em especial para as áreas da Engenharia Civil e Agronomia. Uma dessas propriedades é a capacidade de infiltração em solos não saturados, que corresponde a passagem de líquidos pelos poros a partir da superfície do solo.

No ano de 1931, o físico Lorenzo Adolph Richards elaborou uma equação que é capaz de descrever o movimento de água em meio a solos porosos, chamada de equação de Richards, RICHARDS (1931).

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\Psi) \left(\frac{\partial(\Psi + z)}{\partial z} \right) \right] \quad (1)$$

A Eq. (1) possui como base o princípio da conservação de massa e a Lei de Buckingham-Darcy, com θ indicando a umidade volumétrica, Ψ representando o potencial matricial / potencial capilar, $K(\Psi)$ indica a condutividade hidráulica do solo não-saturado, z representando a coordenada vertical e t representa o tempo. Esse modelo é uma equação diferencial parcial (EDP), que é frequentemente utilizada na modelagem de fenômenos físicos de diversas áreas científicas.

O estudo numérico da equação de Richards neste trabalho foi elaborado sobre a dissertação de Mestrado de Freitas (2015). O objetivo é determinar a solução numérica da equação de Richards analisada na horizontal por meio da aplicação do método das diferenças finitas (MDF). É construído um código computacional no *software* Scilab, com posterior realização de simulações numéricas considerando dados de contorno e fronteira propostos por Freitas. Além disso, com os dados obtidos realizam-se observações de estabilidade e convergência do método utilizado.

METODOLOGIA

Considera-se a Eq. (1) linearizada na base Ψ com seguintes condições iniciais e de contorno:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}, \text{ com } \beta = \frac{K_s}{(\theta_s - \theta_r)\alpha}$$

$$\begin{cases} \Psi(z, 0) = \Psi^{inicial}(z), 0 \leq z \leq L \\ \Psi(0, t) = \Psi_0, t > 0 \\ \Psi(L, t) = \Psi_L, t > 0 \end{cases}$$

Para a geração de uma malha de pontos espacial e temporal, tendo como origem a discretização do domínio da equação dado por $(z, t) \in [0, L] \times [0, T]$. Devem-se escolher valores de n e $m \in \mathbb{N}$, e definir h e k dados por:

$$h = \frac{L}{n}, 0 = z_0, L = z_n$$

$$k = \frac{T}{m}, 0 = t_0, T = t_m$$

Deste modo criam-se pontos de malha (z, t) , dados por $z_{i+1} = z_i + h$ com $i = 0, \dots, n - 1$ e $t_{j+1} = t_j + k$ com $j = 0, \dots, m - 1$.

O método implícito de Crank-Nicolson aproxima o valor das derivadas da EDP no ponto $(xi, tj + \frac{1}{2}) = (ih, (j + \frac{1}{2})k)$ por meio de expansões de Taylor progressiva e centrada nas variáveis de tempo e espaço, respectivamente.

$$\Psi_t \left(i, j + \frac{1}{2} \right) = \beta \Psi_{zz} \left(i + j + \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{\Psi(i, j + 1) - \Psi(i, j)}{k} = \frac{\beta}{2} (\Psi_{zz}(i, j + 1) + \Psi_{zz}(i, j))$$

Com

$$\Psi_{zz}(i, j + 1) = \frac{\Psi(i+1, j+1) - 2(\Psi(i, j+1) + \Psi(i-1, j+1))}{h^2}$$

$$\Psi_{zz}(i, j) = \frac{\Psi(i+1, j) - 2(\Psi(i, j) + \Psi(i-1, j))}{h^2}$$

Com o uso dessas aproximações, chega-se no seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned} \frac{-k\beta}{2h^2} \Psi_{i-1}^{j+1} + \left(1 + \frac{k\beta}{h^2} \right) \Psi_i^{j+1} - \frac{k\beta}{2h^2} \Psi_{i+1}^{j+1} & \quad (2) \\ & = \frac{k\beta}{2h^2} \Psi_{i+1}^j + \left(1 - \frac{k\beta}{h^2} \right) \Psi_i^j + \frac{k\beta}{2h^2} \Psi_{i-1}^j \end{aligned}$$

Na Eq. (2), β é a difusividade da água constante. Esse sistema de equações algébricas é matricialmente representado por:

$$A\Psi_i^{j+1} = B\Psi_i^j + C \quad (3)$$

válida para $j \geq 0$. Na Eq. (3) temos que A e B são matrizes tridiagonais que dependem de $a = 1 + \mu\beta$, $b = -\frac{\mu\beta}{2}$ e $c = 1 - \mu\beta$, $\mu = \frac{k}{h^2}$ como abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c & -b & 0 & \dots & 0 \\ -b & c & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & c & -b \\ 0 & \dots & 0 & -b & c \end{bmatrix}$$

O vetor C carrega os valores das condições de contorno do problema. A Eq. (3) é incondicionalmente estável e apresenta ordem de precisão $O(k, h^2)$, BURDEN (2008).

RESULTADOS

Para as simulações numéricas utilizando código computacional desenvolvido no *software* Scilab foram considerados os seguintes dados:

Condições de contorno prescritas.

$$\Psi(t, 0) = \Psi(t, L = 1) = 0.$$

Condição Inicial dada em todos os nós.

$$\Psi(0, z) = \text{sen}(\pi z).$$

$ks = 3 \times 10^{-6}$ [m/s] Condutividade hidráulica saturada.

$\theta_s = 0,5$ [m³/m³] Umidade saturada.

$\theta_r = 0,1$ [m³/m³] Umidade residual.

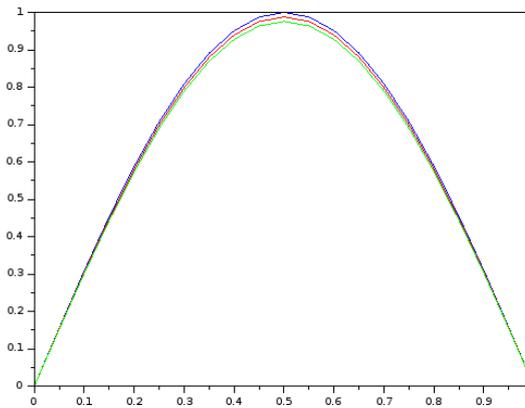
$\alpha = 0,0000075$ [m⁻¹] Relação gravidade capilaridade.

$L = 1$ [m] Comprimento da coluna do solo

T em horas, com $0 \leq t \leq T$.

Na Figura 1 abaixo está ilustrado o perfil do potencial capilar do solo Ψ no tempo $T = 2$ horas. Foi utilizada uma malha com 20 nós no domínio temporal e 20 nós no domínio espacial, representados no eixo vertical e horizontal respectivamente, das figuras a seguir.

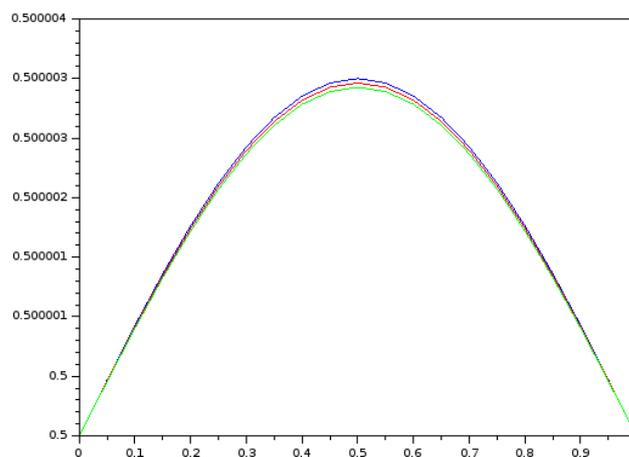
Figura 1 – Perfil do potencial capilar



Fonte: Autoria própria (2020).

Considerando a mesma malha de pontos, na Figura 2 está ilustrado o perfil da umidade volumétrica do solo θ no tempo $T = 2$ horas.

Figura 2 – Perfil da umidade volumétrica



Fonte: Autoria própria (2020).

Realizaram-se alguns outros testes para tempos maiores (de 4h e 8h) variando os números de pontos na malha, com obtenção de resultados similares. Também se comparou o perfil do potencial capilar da Eq. (2) com a solução analítica da equação do calor, dado que o modelo de Richards nesse caso é similar. O erro obtido nessa comparação foi da ordem de 10^{-8} , o que reforça a ideia da convergência do método numérico utilizado.

CONCLUSÃO

Com este trabalho foi possível aplicar o método de Crank-Nicolson e estudar o comportamento numérico da solução da equação de Richards linearizada no caso da infiltração horizontal. Foram observadas a partir das soluções numéricas em diferentes passos de tempo, a convergência e estabilidade do método para esse modelo. Além disso, também observou-se o comportamento físico esperado para o problema de infiltração a partir da comparação do perfil de umidade do solo em diferentes pontos da coluna de solo para um tempos fixos.

REFERÊNCIAS

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise numérica**. Cengage Learning, 2008.

FREITAS, Amauri Aguiar de. **Análise e computação de um modelo generalizado da Equação de Richards**. 2015. 74 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

RICHARDS, L. A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. **Journal of Applied Physics**, New York, v. 1, n. 5, p. 318-333, 1931.