https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2020

Resolução Numérica de um Modelo de Vibração em uma Barra Elástica

Numerical Solution of a Model for Longitudinal Vibrations of a Bar

Felipe de Carvalho Hosp
felipehosp@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Juliana Castanon Xavier
julianaxavier@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

RESUMO

Este trabalho tem como o objetivo o estudo sobre a resolução numérica de um modelo de vibrações longitudinais em uma barra elástica de comprimento L. Escolhe-se para a discretização da malha espacial o método dos elementos finitos e para a malha temporal o método de Crank-Nicolson, que se comporta de maneira estável com modelos similares. Após a discretização espacial, aplica-se juntamente com o método de Crank-Nicolson, um método de predição-correção para resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias obtido. Este trabalho é uma parceria com um grupo de pesquisa da Universidade Federal do Rio de Janeiro e está em andamento. Atualmente, está se desenvolvendo o código computacional no *software Octave* para obtenção de solução numérica, para posterior validação dos métodos utilizados e realização de testes numéricos de convergência.

PALAVRAS-CHAVE: Equações diferenciais parciais. Método dos elementos finitos. Diferenças finitas.

ABSTRACT

The objective of this work is to solve numerically a model of longitudinal vibrations of an elastic bar. With this aim in mind two methods were chosen: the finite element method for the discretization of the spatial mesh and the Crank-Nicolson method for the temporal one. After the spatial discretization, a predictor-corrector scheme was applied along with the Crank-Nicolson method for the resolution of the differential partial equation system. This work is a partnership with a Federal University of Rio de Janeiro group and is not finished. Currently a computational code is being made in *Octave* with the aim to validate the numerical methods used and after that numerical tests of convergence shall be made.

KEYWORDS: Partial diferential equations. Finite elements method. Finite Difference.

Recebido: 19 ago. 2020.
Aprovado: 01 out. 2020.

INTRODUÇÃO

Nesse trabalho temos com o objetivo de dissertar sobre o estudo feito sobre a resolução numérica de um problema de vibrações longitudinais em uma barra elástica de comprimento L e que está sujeita a uma força nesse extremo.

Esse problema é modelado a partir de uma equação diferencial parcial (EDP) que tem segunda derivada no tempo e quarta no espaço, como visto abaixo.

$$\begin{cases} u'' - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|^p \dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial^4 u'}{\partial x^4} = 0, x \in \Omega, t > 0 \\ u(0,t) = 0, t > 0 \\ u''(L) + \left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(L)\right|^p \dfrac{\partial u}{\partial x}(L)\right) + \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x}(L) - \dfrac{\partial^3 u'}{\partial x^3}(L) = 0, t > 0 \\ u(0,x) = u^0(x), u'(0,x) = u^1(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

com $\Omega = (0,L), u = u(t,x)$ e $u' = \frac{\partial u}{\partial t}$.

O modelo descrito na Eq. (1) é obtido a partir de um problema físico de Timoshenco-Young-Weaver em Weaver *et. al* (1990). Para estudar esse problema numericamente, usou-se o método de elementos finitos (MEF) na discretização da variável espacial, juntamente com o método de Crank-Nicolson na a discretização da variável temporal do problema, tornando-o assim um problema totalmente discreto que deverá ser resolvido com o auxílio de uma rotina computacional, como descrito em Burden e Feires (2008).

A escolha desses métodos foi inspirada por resultados numéricos estáveis e convergentes obtidos no estudo numéricos de modelos similares ao descrito na Eq. (1), como pode ser observado em Rincon *et. al* (2016).

MATERIAIS E MÉTODOS

Inicia-se o estudo numérico da Eq. (1) aplicando o MEF. Para isso, é necessário utilizar a formulação fraca do problema. Essa formulação considera o espaço de dimensão finita $V_m \subset H_L^2(0,L)$ gerado pelo conjunto $[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$. A formulação fraca da Eq. (1) é dada por:

$$\begin{cases} (u'', z) + \left(\dfrac{\partial^2 u'}{\partial x^2}\right) + (g(u(t)), z) + u''(L,t)z(L) = 0, \\ (u(0,x), z) = (u^0, z) \qquad (u'(0,x), z) = (u^1, z) \end{cases} \tag{2}$$

com $z \in H_L^2(0,L) = \{v \in H^2(0,L), v(0) = v_x(0) = 0\}$. Para esse sistema considerou-se a função $g(u(t)) = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \frac{\partial u}{\partial x}$, com $p \geq 1$ para garantir a unicidade de solução do modelo. A existência é garantida sempre que os dados iniciais u^0 e u^1 pertencem ao espaço $H_L^2(0,L) \cap H^4(0,L)$.

Se considerarmos $z \in V_m \subset H_L^2(0,L)$, o problema torna-se encontrar $u_m : [0,T] \to V_m$, que é a projeção da solução do problema forte no espaço de dimensão finita escolhido.

Para representar o espaço V_m, considerou-se as funções de base (ϕ) dadas pelo polinômio interpolador de Hermite. Esses polinômios interpolam a função a primeira derivada. Para a estruturação numérica do problema, fez-se necessário a divisão do intervalo $[0, L]$ usando os nós de malha $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_m < x_{m-1} = L$, tal que $M \in \mathbb{N}$. Para cada nó x_i definiu-se uma função interpoladora ϕ_i e uma função interpoladora da derivada ψ_i, dadas por:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \left(\left|\frac{x - x_i}{h}\right| - 1\right)^2 \left(2\left|\frac{x - x_i}{h}\right| + 1\right), & \forall x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ 0, & \forall x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{3}$$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \left(\left|\frac{x - x_i}{h}\right| - 1\right)^2 (x - x_i), & \forall x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ 0, & \forall x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{4}$$

RESULTADOS PARCIAIS

Considerando ϕ_i e ψ_i $(i = 1, 2, \dots, m-1)$ os elementos da base do espaço V_m e usando $u_m(t)$ e $v_m(t) = u_m'(t)$, pode-se representar as soluções semi-discretas do problema dado pela Eq. (2) por:

$$u_m(t, x) = \sum_{i=1}^{m-1} \big(a_i(t)\phi_i(x) + b_i(t)\psi_i(x)\big) \tag{5}$$

$$v_m(t, x) = \sum_{i=1}^{m-1} \big(c_i(t)\phi_i(x) + d_i(t)\psi_i(x)\big) \tag{6}$$

de modo que determinar a solução aproximada do problema $u_m(t)$ passa pela determinação de $v_m(t) = u_m^{'}(t)$, que é utilizada em uma mudança de variáveis aplicada na Eq. (2). Utiliza-se as Eqs. (5) e (6) na Eq. (2), considerando $z = \phi_j$ e $z = \psi_j$ $(j = 1{,}2, \dots, m-1)$, e após alguns cálculos é possível montar o sistema de equações diferenciais ordinárias dado por:

$$\hat{A}_{ij}X'(t) + B_{ij}X(t) + G_j^1\big(Y(t)\big) + G_j^2\big(Y(t)\big) = 0 \tag{7}$$

onde $\hat{A}_{ij} = (A_{ij} + \chi_{ij})$ e

$$X(t) = [c_1(t)\ c_2(t)\ \cdots\ c_{m-1}(t)\ d_1(t)\ d_2(t) \cdots\ d_{m-1}(t)]^T,$$

$$Y(t) = [a_1(t)\ a_2(t) \cdots a_{m-1}(t)\ b_1(t)\ b_2(t) \cdots\ b_{m-1}(t)]^T,$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} (\phi_i, \phi_j) & (\psi_i, \phi_j) \\ (\phi_i, \psi_j) & (\psi_i, \psi_j) \end{bmatrix},$$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} (\phi_{xxi}, \phi_{xxj}) & (\psi_{xxi}, \phi_{xxj}) \\ (\phi_{xxi}, \psi_{xxj}) & (\psi_{xxi}, \psi_{xxj}) \end{bmatrix},$$

$$\chi_{ij} = \begin{bmatrix} (\phi_i(L), \phi_j(L)) & (\psi_i(L), \phi_j(L)) \\ (\phi_i(L), \psi_j(L)) & (\psi_i(L), \psi_j(L)) \end{bmatrix},$$

$$G_j^1\big(Y(t)\big) = \big(g(\textstyle\sum_{i=1}^m a_i(t)\phi_i(x) + b_i(t)\psi_i(x)), \phi_{xj}(x)\big),$$

$$G_j^2\big(Y(t)\big) = \Big(g(\textstyle\sum_{i=1}^m a_i(t)\phi_i(x) + b_i(t)\psi_i(x)), \psi_{xj}(x)\Big).$$

As matrizes A e B são formadas a partir dos produtos internos das funções ϕ e ψ, indicados por (ϕ,ψ), e a matriz χ a partir dos produtos de $\phi(L)$ e $\psi(L)$.

Como é possível ver, o sistema de equações diferenciais dado pela Eq. (7) mantém-se contínuo na variável temporal. Para que esse sistema seja resolvido numericamente, aplica-se o método de Crank-Nicolson.

Para essa discretização da variável temporal, considera-se o intervalo $[0,T]$, com T suficientemente grande, com um espaçamento uniforme de tamanho $\Delta T = T/N$, onde $N \in \mathbb{N}$. O método de Crank-Nicolson é um método estável que transforma o sistema dado na Eq. (7) em um sistema de equações algébricas.

Considerando que $t^n = n\Delta t$, denotamos por $u_m^n = u_m(t^n)$ a solução totalmente discreta do problema dado na Eq. (1), para cada $m,n \in \mathbb{N}$. Tomando o tempo $t = t^{n-1/2} = t^{n*}$, a Eq. (7) pode ser reescrita como:

$$\hat{A}_{ij}X'(t^{n*}) + B_{ij}X(t^{n*}) + G_j^1\big(Y(t^{n*})\big) + G_j^2\big(Y(t^{n*})\big) = 0 \tag{8}$$

Considerando as seguintes aproximações validas para todos os componentes de $X(t)$ e $Y(t)$.

$$X'(t^{n*}) = (X^{n*})' = \frac{X^n - X^{n-1}}{\Delta t}, \tag{9}$$

$$X(t^{n*}) = X^{n*} = \frac{X^n + X^{n-1}}{2}, \tag{10}$$

$$Y(t^{n*}) = Y^{n*} = \frac{3Y^{n-1} - Y^{n-2}}{2}. \tag{11}$$

Substituindo as Eqs. (9, 10 e 11) na Eq. (8) é obtém-se a equação a seguir:

$$\begin{aligned}(2\hat{A} + \Delta t B)X^n = (2\hat{A} + \Delta t B)X^{n-1} - 2\Delta t G_j^1\Big(Y^{n-2} + \frac{3}{4}\Delta\mathrm{t}(\mathrm{X}^{n-1} + \mathrm{X}^{n-2})\Big) \\ - 2\Delta t G_j^2\Big(Y^{n-2} + \frac{3}{4}\Delta\mathrm{t}(\mathrm{X}^{n-1} + \mathrm{X}^{n-2})\Big)\end{aligned} \tag{12}$$

válida para $n \geq 2$.

Para inicializar-se o processo iterativo e solucionar o problema descrito pela Eq. (12) é necessário que X^0, X^1, Y^0 e Y^1 existam e sejam conhecidos. Portanto para obter X^0 e Y^0 usa-se as condições dadas do estado inicial do problema, ou seja, $u_m(0) = u^0(0)$ e $v_m(0) = u^1(0)$. As funções $u_m(0)$ e $v_m(0)$ são as projeções dos dados iniciais no espaço de dimensão finita V_m.

De maneira a encontrar X^1 e Y^1 usa-se o método de predição-correção. Com isso considerando a predição de $Y^{1*} = Y^0$, obtém-se o valor de X^{1*}. Esse valor então é usado para o cálculo de Y^1, que por sua vez corrige o valor de X^1. É importante observar que esse processo só precisa ser realizado uma única vez. A partir daí, são conhecidas todas as informações necessárias para obtenção do vetor X^n para cada passo de tempo $n \geq 2$.

CONCLUSÃO

Esse é um trabalho em andamento e em parceria com pesquisadores do departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal do Rio de Janeiro, e encontra-se atualmente em desenvolvimento, na fase de validação do código computacional. O mesmo está sendo desenvolvido no *software Octave*®.

Espera-se que após validação e obtenção da solução numérica para esse problema, possa ser realizada a análise numérica do mesmo, relacionando as escolhas de malhas temporais e espaciais com estabilidade e convergência do método numérico utilizado.

REFERÊNCIAS

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. Análise numérica. **Cengage Learning**, 2008.

RINCON, Mauro A.; XAVIER, Juliana C.; VIGO, Daniel G. Alfaro. Analysis and computation of a nonlinear Korteweg-de Vries system. **BIT Numerical Mathematics**, v. 56, n. 3, p. 1069-1099, 2016.

WEAVER JR, William; TIMOSHENKO, Stephen P.; YOUNG, Donovan Harold. Vibration problems in engineering. **John Wiley & Sons**, 1990.