Uma implementação do acelerador de convergência de Steffensen a equações não lineares

An implementation Steffensen's convergence accelerator to nonlinear equations

Antonio Marco Mazetti Trugilio
antonio.marco15@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Luiz Antonio Farani de Souza
lasouza@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Rodrigo dos Santos Veloso Martins
rodrigomartins@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Recebido: 19 ago. 2020.
Aprovado: 01 out. 2020.

RESUMO

Nesse estudo, foi aplicado o acelerador de convergência de Steffensen ao método de Newton Modificado para a resolução de equações não-lineares. Ao realizar a pesquisa, foi utilizada a linguagem de programação Python para realizar uma bateria de testes utilizando os métodos de Newton Padrão, Newton Modificado e Newton Modificado com o acelerador de Steffensen. Os resultados mostram que em termos de eficiência o acelerador de Steffensen aplicado ao método de Newton Modificado obteve resultados melhores que o método de Newton Modificado e em alguns casos, melhor que o Newton Padrão.

PALAVRAS-CHAVE: Método de Newton. Acelerador de Steffensen. Equações não lineares.

ABSTRACT

In this study, the Steffensen convergence accelerator was applied to the Modified Newton method for solving nonlinear equations. When performing the research, the Python programming language was used to perform a battery of tests using the Standard Newton, Modified Newton and Modified Newton methods with the Steffensen accelerator. The results show that in terms of efficiency the Steffensen accelerator applied to the Modified Newton method obtained better results than the Modified Newton method and in some cases, better than the Standard Newton.

KEYWORDS: Newton's method. Steffensen accelerator. Nonlinear equations.

INTRODUÇÃO

Em edifícios altos, o projeto de sustentação e estabilidade da edificação conta com o uso de materiais como aço, concreto e outros elementos. Esse arranjo de materiais tem como função resistir a esforços internos e externos exercidos sobre a construção. Nesse tipo de estrutura, forças laterais são exercidas devido à ação do vento e não podem ser negligenciadas (NETO e PIMENTA, 2006).

Para tal tipo de estrutura que sofre a ação do vento é considerada na análise estrutural a não linearidade geométrica (a consideração de grandes deslocamentos), a qual não é restrita a deslocamento, alongamento, rotações e distorções (VIEIRA, 2017). Assim, o sistema de equações de equilíbrio que descreve o comportamento da estrutura é não linear.

Visando realizar simulações numéricas que computem os esforços externos recebidos por essas estruturas e redistribuam os mesmos aos elementos estruturais internos de forma a atingir o equilíbrio estático, é necessário usar métodos matemáticos e computacionais. Em busca de encontrar a solução aproximada do sistema de equações não lineares é possível empregar métodos numéricos, como os métodos de Newton (daqui em diante chamado de Newton Padrão), Newton Modificado, Secante, entre outros. Ao entrar nesse campo, é importante que existam pesquisas que busquem métodos numéricos mais eficientes, para que possam surgir softwares de simulação estrutural que obtenham a solução do problema com um menor tempo de processamento.

Neste resumo, é aplicado ao método de Newton Modificado o acelerador de convergência de Steffensen (Burden e Faires, 2011). A linguagem de programação Python é utilizada a fim de criar rotinas para a solução das equações. Os resultados numéricos obtidos apontam que houve uma melhora no desempenho em comparação ao método de Newton Modificado padrão, haja vista que a solução dos problemas foi obtida com um menor número de iterações e menor tempo de processamento.

MATERIAIS E MÉTODOS

Uma pesquisa em torno de uma melhora na eficácia de um método numérico exige que se façam comparações com outros métodos para que se obtenham parâmetros de análise. Foram implementados neste trabalho os seguintes métodos: Newton Padrão (NP), Newton Modificado (NM) e Newton Modificado com Acelerador de Steffensen (NMA), descritos a seguir nesta seção.

Para encontrar a solução de equações não lineares $f(x) = 0$ estes métodos utilizam um valor inicial e uma sequência {xk} que converge para a raiz Ɵ de $f(x)$:

$$f(\theta) = 0. \tag{1}$$

Um exemplo clássico de esquema iterativo é o método de NP definido por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{2}$$

em que $f'(x_k)$ é a derivada primeira de f no ponto x_k, x_k é o valor de x da iteração anterior (k) e x_{k+1} é o valor de x na iteração corrente (k+1). Portanto, a cada iteração realizada é encontrado um novo valor da sequência (x_{k+1}), o qual espera-se estar cada vez mais próximo do valor da raiz ϴ.

É comum não encontrar um valor exato para x que satisfaça a Eq. (1), então é usual que as iterações sigam até que um critério de convergência, definido por uma tolerância $\phi > 0$, seja satisfeito. Neste trabalho foi utilizado o critério

$$|x_{n+1} - x_n| < \phi. \quad (3)$$

Sendo assim, as iterações devem cessar no momento em que a desigualdade em (3) seja satisfeita.

O método NM é semelhante ao método NP, porém ao invés de realizar o cálculo da derivada de $f(x)$ em todas as iterações conforme (2), o método NM calcula a derivada apenas na primeira iteração ($f'(x_0)$), e mantém-se constante ao logo do processo iterativo. O esquema iterativo de NM é dado por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}. \quad (4)$$

Esta alteração no método NP faz com que cada iteração possa ser executada mais rapidamente, pois dispensa o cálculo de uma derivada. No entanto, frequentemente o número de iterações necessárias para convergência passa a ser maior.

A fim de aumentar a velocidade de convergência do NM, foi adicionado o método o acelerador de Steffesen, que consiste de uma modificação no método $\Delta 2$ de Aitken (Burden e Faires, 2011). O acelerador de Steffensen é aplicado por:

$$x_{k+3} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}. \quad (5)$$

Observando (5), nota-se que a formulação depende de x_k, x_{k+1} e x_{k+2}. Esses valores devem ser obtidos a partir de uma sequência $\{x_k\}$ gerada por um método iterativo, nesse caso o NM, e então o elemento x_{k+3} é gerado pelo acelerador de Steffesen. O acelerador é aplicado a cada três iterações que geram uma sequência $\{x_k\}$. Para exemplificar, tem-se a tabela 1.

Tabela 1 – Sequência iterativa

$\{x_0 \rightarrow x_6\}$	**Iteração**
x_0	-
x_1	NM
x_2	NM
x_3	AS
x_4	NM
x_5	NM
x_6	AS

Fonte: Autoria própria.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com o objetivo de validar os códigos implementados, foram utilizadas as equações propostas por AHMED (2015). As equações não lineares empregadas estão descritas no Quadro 1, o qual α indica uma das raízes da equação.

Quadro 1 – Equações e raízes

Função	α
$f_1(x) = 4x^4 - 4x^2$	1,00000
$f_2(x) = e^{\sin(x) + \ln(x^2+1)} - 4x^2$	3,23756
$f_3(x) = \sin(x) - x/2$	1,89549
$f_4(x) = e^{-x} + \cos(x)$	1,74613
$f_5(x) = sin^2(x) - x^2 + 1$	1,40449
$f_6(x) = (x-2)^{23} - 1$	3,00000
$f_7(x) = e^{(x^2+7x-30)} - 1$	3,00000
$f_8(x) = (x+2)e^x - 1$	0,44285

Fonte: Adaptada de AHMED (2015).

Foi realizada uma série de testes computacionais utilizando-se os dados do Quadro 1 e respeitando o critério de convergência dado por (3), sendo $\phi = 10^{-32}$. Após os testes foi verificado que os resultados conferiam com os resultados de AHMED (2015), inclusive os resultados convergiram para o mesmo α presente no Quadro 1. A linguagem de programação Python foi utilizada para programar rotinas que aplicassem os métodos iterativos desejados. Os resultados numéricos com os métodos iterativos NR, NM e NMA são apresentados no Quadro 2. Nesse quadro, x_0 é a aproximação inicial, NC indica que o método em questão não obteve convergência, NI refere-se ao número de iterações até a convergência para a solução dada a tolerância e TE é usado para indicar o tempo de processamento em segundos. As simulações foram efetuadas por meio de um notebook com um SSD do tipo M.2 de 120 GB, processador Intel Core i7 de sétima geração, 16GB de memória RAM, uma placa de vídeo Geforce gtx 1050ti e sistema operacional Windows 10.

Quadro 2 – Resultados numéricos

Função / x_0	NP	NM	NMA
$f_1(x)$, $x_0 = 0{,}75$	NI = 11 TE = 0,0290358	NC	NI = 53 TE = 0,0265591
$f_2(x)$, $x_0 = 3{,}5$	NI = 7 TE = 0,04340660	NI = 34 TE = 0,0912583	NI = 15 TE = 0,0290998

Função / x_0	NP	NM	NMA
$f_3(\mathrm{x})$, $x_0 = 1{,}6$	NI = 7 TE = 0,0199994	NC	NI = 14 TE = 0,0131728
$f_4(\mathrm{x})$, $x_0 = 2$	NI = 6 TE = 0,0249469	NI = 18 TE = 0,0275152 s	NI = 12 TE = 0,0142228
$f_5(\mathrm{x})$, $x_0 = 2$	NI = 7 TE = 0,0344984	NI = 49 TE = 0,0721053	NI = 17 TE = 0,0181714
$f_6(\mathrm{x})$, $x_0 = 2{,}9$	NI = 14 TE = 0,02434330	NC	NI = 260 TE = 0,0961881
$f_7(\mathrm{x})$, $x_0 = 2{,}8$	NI = 18 TE = 0,0468363	NC	NI = 8960 TE = 6,4260478
$f_8(\mathrm{x})$, $x_0 = -2{,}5$	NI = 7 TE = 0,01483380	NC	NC

Fonte: Autoria própria.

Nota-se no Quadro 2 que os resultados do método NMA são melhores que os do método NM quanto à convergência, ao tempo de execução e ao número de iterações. Ainda assim, em algumas equações o método NMA teve problemas de convergência, porque a derivada f' é determinada somente na primeira iteração e mantida constante nas demais. Vê-se que o método NP foi o mais robusto, obtendo a convergência em todos os casos, e alcançou a solução com um número inferior de iterações para todas as equações

Em adição, observa-se que o método MNA conseguiu obter a convergência para algumas equações com um tempo de processamento menor do que o método NP. Esse fato é justificado pelo cálculo da derivada da função a cada iteração pelo método NP, o que gera um maior custo computacional e afeta, consequentemente, o tempo de processamento.

CONCLUSÃO

Os resultados sugerem que o NMA é um método iterativo com uma eficiência superior ao NM e, para algumas das equações estudadas, conseguiu alcançar a solução com um tempo de processamento menor que o NP. Na direção de trabalhos futuros, sugere-se aplicar o método NMA na obtenção da solução aproximada de problemas não lineares da engenharia estrutural.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UTFPR pelo apoio no desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

AHMED, Shno. An improvement of Jarratt method with seventh-order convergence. **Intrnational Journal of Scientific Research and Innovative Technology,** issn: 2313-3759 v**.** 2, n. 5, maio, 2015. Disponível em:

https://www.ijsrit.com/uploaded_all_files/1894004673_w11.pdf . Acesso em: 19 ago. 2019.

FONSECA NETO, João de Deus; PIMENTA, Paulo de Mattos. Análise não-linear inelástica de edifícios. **Rem: Rev. Esc. Minas**, Ouro Preto , v. 59, n. 1, p. 71-79, Mar. 2006 . Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0370-44672006000100010&lng=en&nrm=iso>. access on 20 Aug. 2020. https://doi.org/10.1590/S0370-44672006000100010.

VIEIRA, V. V. S.; RODRIGUES JUNIOR, S. J.; VELOSO, L. A. C. M. Análise da estabilidade global de edifícios de concreto armado utilizando o coeficiente γ z. **Revista IBRACON de estruturas e materiais**, v. 10, n. 5, p. 1113-1140, 2017.

Muñoz, L. F. P.; Roehl, D. A Continuation method with combined restrictions for nonlinear structure analysis. Finite Elements in Analysis and Design, v. 130, p. 53-64, 2017.

Burden, R. L.; Faires, J. D. Numerical analysis. Boston: Brooks/Cole CENGAGE Learning, 2011.