

O Método dos Elementos Finitos aplicado à análise de treliças tridimensionais

The Finite Element Method applied to three-dimensional trusses analysis

RESUMO

Luca Fonseca Maciel

lucam@alunos.utfpr.edu.br

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

Leandro Waidemam

leandrowaidemam@gmail.com

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

Este presente trabalho aborda o desenvolvimento de uma formulação e a implementação desta em uma ferramenta computacional interativa que tem como objetivo realizar a análise elástica-linear de estruturas treliçadas tridimensionais sujeitas a carregamentos e restrições em seus nós. Para este fim, a formulação se baseia no Método dos Elementos Finitos (MEF) que se baseia na subdivisão da estrutura em elementos menores, chamados de elementos finitos, para os quais são escritas equações locais de equilíbrio. As equações de todos os elementos são, então, expandidas e incorporadas entre si de forma a equacionar o equilíbrio da estrutura como um todo. Desta forma é possível discretizar cada barra da treliça através de um elemento finito e, para cada um deles, escrever uma matriz de rigidez, que será demonstrada genericamente ao longo deste artigo. Por final é realizado o cálculo de uma estrutura com os valores de forças normais atuantes nas barras e deslocamentos dos nós já previamente conhecidos para assim verificar a veracidade dos resultados retornados pelo programa elaborado.

PALAVRAS-CHAVE: Método dos Elementos Finitos. Algoritmos computacionais. Treliças tridimensionais.

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autorial: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



ABSTRACT

This work presents a formulation development and its implementation in an interactive computational tool. It aims to perform the elastic-linear analysis of three-dimensional trusses subject to loads and restrictions in their nodes. For this purpose, the formulation is based on the Finite Element Method (FEM) which considers the subdivision of structures into smaller elements, called finite elements, for which local equilibrium equations are written. The equations of all the elements are then expanded and incorporated with each other in order to equate the equilibrium of the structure as one. In this way, it is possible to discretize each truss bar using a finite element and, for each one of them, write a stiffness matrix, which will be demonstrated generically throughout this paper. Finally, a structure is calculated with the values of normal forces acting on the bars and nodal displacements previously known to verify the veracity of the results returned by the software developed.

KEYWORDS: Finite Element Method. Computational algorithms. Three-dimensional trusses.

INTRODUÇÃO

Treliças são elementos estruturais formados pelo cruzamento de elementos retos que se ligam pelas extremidades, sendo esses pontos de ligação denominados de nós. Se apoiados e carregados somente por estas extremidades as únicas forças internas atuantes serão forças normais de compressão ou tração que se manterão constantes ao longo de cada elemento. Exemplos comuns deste modelo estrutural são vistos em pontes, coberturas de rodoviárias e na armadura de vigotas de lajes.

Diante de um cenário onde o auxílio de soluções informáticas vem se tornando mais presente nas decisões de engenharia, este presente trabalho tem como objetivo apresentar uma formulação baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF) implementável em um código computacional que facilite o trabalho dos profissionais desta área que optem por utilizar este modelo estrutural.

METODOLOGIA

A análise estrutural baseada no MEF tem como princípio dividir a estrutura em pequenos elementos, denominados elementos finitos, para os quais são definidas as matrizes de rigidez e de transformação de coordenadas e o vetor de forças nodais equivalentes. As matrizes e vetores dos elementos, ditos locais, são então alocados em uma matriz de rigidez e em um vetor de cargas, ditos globais, que representam a estrutura como um todo. A partir de então, as condições de contorno (nós com deslocamentos restritos) são inseridas na matriz de rigidez e no vetor de cargas globais de forma a possibilitar a solução do sistema de equações algébricas e a determinação dos deslocamentos nodais desejados.

Assim, para a definição da matriz de rigidez local de um elemento finito de treliça (coincidente com as próprias barras da treliça), considera-se que este se trata de um objeto deformável e que o comportamento mecânico do material que o compõe é regido pela Lei de Hooke, isto é, ele apresentará deformações (ϵ_x) diretamente proporcionais às tensões (σ_x) atuantes, como pode se ver na equação (1).

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad (1)$$

A deformação do elemento é representada pela equação diferencial do deslocamento na direção axial (\hat{u}) do elemento longo como segue:

$$\epsilon_x = \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} \quad (2)$$

Em treliças as ligações das barras são feitas através de rótulas e, assim, a força normal (T) em cada barra é constante, logo:

$$A \cdot \sigma_x = T = \text{constante} \quad (3)$$

Onde:

A : área da secção transversal do elemento.

Substituindo (1) em (3) e em seguida aplicando o operador derivada, obtém-se:

$$\frac{d}{d\hat{x}} \left(A \cdot E \cdot \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} \right) = 0 \quad (4)$$

Considerando uma variação linear do deslocamento ao longo do eixo axial da barra (LOGAN, 2007) e a partir de um sistema de coordenadas local \hat{x} e \hat{y} com origem no nó inicial 1 do elemento, pode-se equacioná-la da seguinte forma:

$$\hat{u} = a_1 + a_2 \cdot \hat{x} \quad (5)$$

Conforme ilustra a Figura 1, os deslocamentos dos nós inicial e final do elemento são representados por \hat{d}_{1x} e \hat{d}_{2x} , respectivamente. Assim,

Como,

$$\hat{u}(0) = \hat{d}_{1x} = a_1 \quad (6)$$

$$\hat{u}(L) = \hat{d}_{2x} = a_2 \cdot L + \hat{d}_{1x} \quad (7)$$

Onde:

\hat{d}_{1x} : deslocamento referente ao nó 1;

\hat{d}_{2x} : deslocamento referente ao nó 2;

L : comprimento da barra.

Tem-se:

$$a_2 = \frac{\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x}}{L} \quad (8)$$

Substituindo as equações (6) e (8) em (5), obtém-se:

$$\hat{u} = \left(\frac{\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x}}{L} \right) \cdot \hat{x} + \hat{d}_{1x} \quad (9)$$

Escrevendo na forma matricial a equação (9), obtém-se:

$$\hat{u} = \left[1 - \frac{\hat{x}}{L} \quad \frac{\hat{x}}{L} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

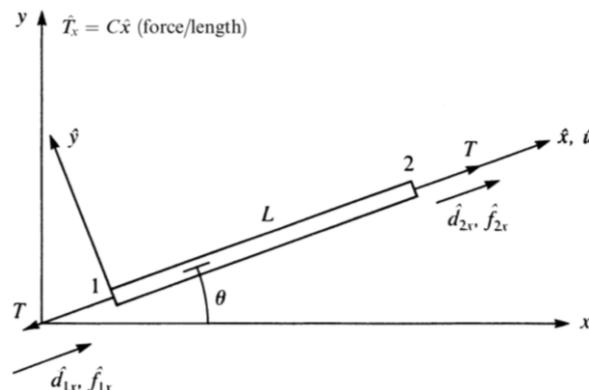
Substituindo a equação (9) na diferencial existente em (2), obtém-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x}}{L} \quad (11)$$

Substituindo as equações (1) e (11) em (3), obtém-se:

$$T = A \cdot E \cdot \left(\frac{\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x}}{L} \right) \quad (12)$$

Figura 1 - Barra submetida a forças de tração T; deslocamentos e forças nodais positivos na direção \hat{x} local.



Fonte: Logan (2007).

Conforme pode-se observar na figura 1, as forças nodais possuem a mesma direção que os vetores de tração presentes na barra, porém no nó 1 o sentido da força nodal é o oposto do vetor de tração (LOGAN, 2007), logo:

$$\hat{f}_{1x} = -T \quad (13)$$

$$\hat{f}_{2x} = T \quad (14)$$

Substituindo a equação (12) em (13) e (14), obtém-se:

$$\hat{f}_{1x} = \frac{A.E}{L} \cdot (\hat{d}_{1x} - \hat{d}_{2x}) \quad (15)$$

$$\hat{f}_{2x} = \frac{A.E}{L} \cdot (\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x}) \quad (16)$$

Escrevendo de forma matricial as equações (15) e (16), obtém-se:

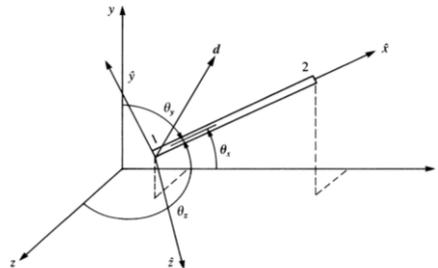
$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = A.E. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Como $\hat{f} = \hat{k} \cdot \hat{d}$ e baseando-se em (17) pode-se afirmar que a matriz de rigidez de um elemento de barra em coordenadas locais é dada pela equação 18.

$$\hat{k} = A.E \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Obtida a matriz de rigidez em coordenadas locais, agora torna-se necessário a transformação destas para coordenadas globais x , y e z .

Figura 2 - Barra em espaço tridimensional: eixos locais e globais.



Fonte: Logan (2007)

Conhecidos os ângulos e os seus respectivos cossenos diretores monta-se a matriz de transformação de coordenadas locais (\hat{x} , \hat{y} e \hat{z}) para globais (x , y e z) da seguinte forma:

$$T^* = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \quad (19)$$

Onde:

C_x : cosseno do ângulo diretor referente ao eixo x ;

C_y : cosseno do ângulo diretor referente ao eixo y ;

C_z : cosseno do ângulo diretor referente ao eixo z .

Obtendo-se a matriz de rigidez em coordenadas globais como segue:

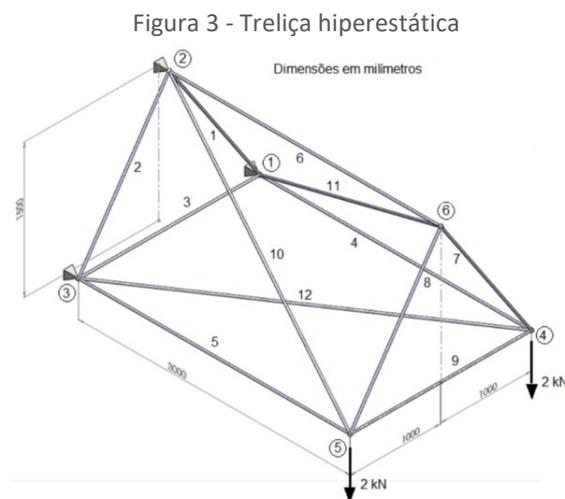
$$k = A.E. (T^*)^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot T^* \quad (20)$$

Uma vez determinada a matriz de rigidez do elemento, a solução do problema como um todo é definida pela correta montagem da matriz de rigidez e vetor de cargas da estrutura como um todo, inserção das condições de contorno e solução do sistema linear de equações (LOGAN, 2007; COOK ET AL, 1989; SORIANO, 1981).

RESULTADOS

Para verificar as respostas fornecidas pelo software implementado e a consequente validação da formulação apresentada, foi realizado o cálculo de uma treliça hiperestática cujos os valores das forças normais atuantes em cada barra e os deslocamentos referentes a cada nó já eram conhecidos. Tal exemplo foi obtido de Hirotoni (2014).

A estrutura é formada por 6 nós e 12 barras, tendo em 2 nós uma força aplicada de 2 kN na direção vertical para baixo e em outros 3 nós apoios que restringem todos os deslocamentos destes. As barras possuem secção transversal circular com um diâmetro de 10 cm e são compostas por material com módulo de elasticidade longitudinal igual a 210 GPa. A geometria, os carregamentos e as condições de vinculação da estrutura podem ser vistas na figura 3.



Fonte: Hirotoni (2014)

Os valores obtidos para os deslocamentos e para as forças normais do presente trabalho e dos obtidos pelo autor citado podem ser observados nas tabelas 1 e 2, respectivamente.

Tabela 1 – deslocamentos nodais

Nó	Programa elaborado			Hirotoni(2014)		
	Desl. X (mm)	Desl. Y (mm)	Desl. Z (mm)	Desl. X (mm)	Desl. Y (mm)	Desl. Z (mm)
4	0,00	0,00	-4,1E-01	0,00	0,00	-4,1E-01
5	-7,0E-03	2,0E-03	-3,9E-02	-7,0E-03	2,0E-03	-3,9E-02
6	7,0E-03	0,00	-3,8E-02	7,0E-03	0,00	-3,8E-02

Fonte: Autoria própria (2020)

Tabela 2 – Forças normais atuantes nas barras

Barra	Programa elaborado Força normal (kN)	Hirotoni(2014) Força normal (kN)
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	-4	-4
6	4	4
7	2,404	2,404
8	0	0
9	-1,333	-1,333
10	4,667	4,667
11	-4,667	-4,667
12	0	0

Fonte: Autoria própria (2020)

Com os resultados obtidos pelo programa elaborado coincidindo em 100% com os fornecidos por Hirotoni (2004), pode-se concluir que a formulação do MEF para treliças tridimensionais apresentada foi corretamente desenvolvida e implementada computacionalmente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo principal apresentar e implementar computacionalmente uma formulação interativa baseada no Método dos Elementos Finitos para a análise de treliças tridimensionais.

Tendo comparado os resultados obtidos com os fornecidos por outro autor, pôde-se comprovar o correto desenvolvimento da formulação, sua correta implementação e também a eficiência do programa computacional desenvolvido.

Conclui-se que o software desenvolvido pode se tratar de uma solução de engenharia passível de ser incorporado na rotina de um profissional desta área, gerando assim agilidade na obtenção de informações relevantes ao processo de concepção de estruturas treliçadas.

Vale ressaltar que tal software contempla somente treliças que possuam barras de secção transversais constantes ao longo de todo seu comprimento, que possuam carregamentos aplicados somente em seus nós e que seus apoios apresentem restrição do deslocamento somente nas direções dos eixos de coordenadas referenciais utilizados (não calculando treliças que apresentem apoio que restrinja deslocamentos em eixos inclinados em relação aos demais apoios).

Em aspectos gerais o trabalho, em sua totalidade, atendeu a todos os objetivos propostos inicialmente de forma satisfatória.

REFERÊNCIAS

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. Concepts and applications of finite element analysis. New York: John Wiley & Sons, 1989. 630p.

HIROTOMI, Vinícius I. W. **Formulação do Método dos Elementos Finitos para a análise de Treliças Tridimensionais**. 2014. 37 e 38 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2014.

LOGAN, Daryl L. A First Course in the Finite Element Method. 4 ed. Plateville: Thomson, 2007.

SORIANO, H. L. Sistemas de equações algébricas lineares em problemas estruturais. Lisboa: Ministério da Habitação e Obras Públicas, 1981. Seminário 280.