https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2020

Verificação de métodos iterativos na solução da equação de Poisson 1D

Verification of iterative methods in the solution of the Poisson 1D equation

Camila Marim Vicentini
camilavicentini@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Ana Paula da Silveira Vargas
anavargas@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Recebido: 19 ago. 2020.
Aprovado: 01 out. 2020.

RESUMO

Com o objetivo de analisar numericamente, resultados obtidos na solução de equações que representam problemas em Engenharias e, ainda, com interesse na verificação numérica de estudos mais avançados, propõe-se a solução da equação de Poisson 1D por meio de dois métodos iterativos, sendo avaliada por meio do comportamento das soluções frente a comparação com a solução analítica. Nesse sentido, a título de iniciação científica, foram explorados conceitos e definições pertinentes com a solução da equação de Poisson 1D, discretizada por meio do método de diferenças finitas, e solução obtida com os métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, métodos usuais utilizados em métodos multigrid, os quais serão explorados no futuro. Os resultados corroboram com a teoria estudada, ou seja, o método de Gauss-Seidel converge mais rápido para a solução do que o método de Gauss-Jacobi e, além disso, apresenta resultados mais acurados, fornecendo subsídios necessários, para a solução em dimensões mais altas.

PALAVRAS-CHAVE: Método de Diferenças Finitas. Métodos Iterativos. Verificação Numérica.

ABSTRACT

In order to analyze numerically, results obtained in the solution of equations that represent problems in Engineering and, also, with interest in the numerical verification of more advanced studies, it is proposed the solution of the Poisson 1D equation through two iterative methods, being evaluated through the behavior of the solutions compared to the analytical solution. In this sense, as a scientific initiation, has been explored concepts and definitions relevant to the solution of Poisson 1D equation, discretized through the finite differences method, and solution got with Gauss-Jacobi and Gauss-Seidel iterative methods, usual methods used in the multigrid method, which will be explored in the future. The results corroborate with the studded theory, that is, the Gauss-Seidel method converges faster to the solution that the Gauss-Jacobi method and, besides that, presente more accurate results, providing necessary subsidies, for the solution in larger dimensions.

KEYWORDS: Finite Differences Method. Iterative Methods. Numerical Verification.

INTRODUÇÃO

A solução da equação de Poisson 1D, por ser unidimensional, vem propiciar um estudo mais detalhado do comportamento de resultados obtidos com a aplicação de métodos numéricos em sua solução, bem como na solução de outros modelos a serem estudados futuramente (VARGAS, 2013). Dentre estes métodos, por exemplo, estão os métodos de discretização, como o de diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos, e de solução de sistemas de equações, como os métodos iterativos. Muitas são as abordagens e os modelos estudados, porém poucos se dedicam a uma análise de erros que são inerentes à solução.

Atividades concernentes à detecção, estimação e controle de erros e/ou incertezas numéricas são indispensáveis, e permitem a apresentação mais confiável de resultados numéricos buscando cada vez mais a sua acurácia. Como exemplo, pode-se considerar projetos que envolvam materiais enrijecidos, como na construção de aeronaves, veículos, navios e construções diversas. Na Engenharia Civil, são exemplos de materiais enrijecidos o concreto armado e o solo reforçado. A solução aproximada para esse tipo de problema pode contribuir de forma relevante no desenvolvimento de tais projetos, no sentido, por exemplo, de maior confiabilidade e segurança em sua execução, evitando assim, catástrofes futuras (Buffon, 2018).

Sabe-se que o objetivo final de interesse científico é a validação de um modelo matemático e para isso a verificação se faz necessária. A validação deve ser precedida pela verificação do código e da solução. A verificação do código e a verificação da solução são processos distintos. A validação é definida como o processo que determina o grau em que um modelo está em representação acurada com o fenômeno real. A verificação é o processo usado para quantificar o erro numérico, e o seu objetivo é estabelecer a acurácia numérica, independente do fenômeno físico, isto é, o processo de verificação mede o quão bem o modelo matemático é resolvido numericamente (Knupp & Salari, 2003).

Este trabalho consiste na verificação numérica da solução da equação de Poisson 1D, que descreve o problema da condução de calor unidimensional, com condições de Dirichlet, em estado permanente.

Para uma melhor compreensão da técnica e do desenvolvimento, aplicados na análise de equações de dimensão maior que um, faz-se primeiramente um estudo sobre os procedimentos no âmbito unidimensional, de forma a considerar-se possíveis efeitos de mudança de domínio no erro numérico e, consequentemente, no erro de discretização.

As principais fontes de erros em simulações numéricas são: erros de truncamento, erros de iteração, erros de arredondamento e erros de programação. Quando as fontes de erro de iteração, arredondamento e programação são minimizadas, o erro de truncamento passa a ser denominado erro de discretização, que é a diferença entre a solução analítica e a solução numérica exata das equações discretizadas (Vargas, 2013).

Com essa ideia em mente, buscou-se analisar resultados numéricos obtidos pela aplicação do método de diferenças finitas. Na solução do sistema de equações resultante, foram utilizados dois métodos iterativos, o método de Gauss-Jacobi e o método de Gauss-Seidel. Estes métodos foram escolhidos a priori para futura utilização de métodos multigrid e seu estudo, necessários na solução de problemas de dimensões 2 e 3.

Mais uma vez, cabe salientar aqui que sendo um trabalho investigativo sobre erros numéricos, faz-se necessário iniciar por modelos mais simples, e a medida em que se avança passa-se para modelos mais complexos.

METODOLOGIA

Como já mencionado anteriormente, o modelo matemático abordado nesse estudo descreve o problema da condução de calor unidimensional com condições de Dirichlet, e é dado pelas Eqs. (1) e (2).

$$-\frac{d^2T}{dx^2} = f(x) \tag{1}$$

$$T(0) = 0, \qquad T(1) = 1 \tag{2}$$

onde $\boldsymbol{T}$ é a temperatura, e o termo fonte é dado por $f(x)$ = 1.

A solução analítica é dada pela Eq. (3).

$$T(x) = \frac{-x^2 + x}{2} \tag{3}$$

A discretização do modelo foi desenvolvida por meio do método de diferenças finitas centradas, em que a derivada segunda, em relação a x, é aproximada por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1} + T_{i+1} - 2T_i}{h^2} \tag{4}$$

e com erro de truncamento resultante dado pela Eq. (5)

$$\varepsilon = -T^{iv}\frac{h^2}{12} - T^{vi}\frac{h^4}{360} - T^{viii}\frac{h^6}{20160} - T^{x}\frac{h^8}{1814400} - \cdots \tag{5}$$

A Eq. (5) se baseia na aproximação da derivada da função pelas respectivas equações de diferenças obtidas por meio da série de Taylor. Esta tem por objetivo, neste trabalho, apresentar as ordens verdadeiras do erro de truncamento. Seu cálculo permite verificar na prática, isto é, a posteriori das soluções numéricas, se à medida que (h) é reduzido, a ordem do erro de discretização das soluções numéricas, tende à ordem assintótica dos erros de truncamento obtido a priori, das soluções numéricas. Como a derivada é diferente de zero, as ordens verdadeiras para o erro no cálculo de T são: 2, 4, 6, ... E, sendo assim, a ordem assintótica do erro no cálculo de T é 2. Isso pode ser verificado a posteriori por meio do método de multiextrapolações de Richardson (MER) (Vargas, 2013), o qual será abordado no futuro. A técnica de MER tem como objetivo reduzir o erro de discretização, melhorando a eficiência e a exatidão computacional. Porém, devido a ocorrências de erros de arredondamento nos resultados desse processo, faz-se necessária a redução desses erros de forma a contribuir para o desempenho ideal do método e, consequentemente, obter a melhor acurácia dos resultados.

Após a discretização chega-se ao sistema dado por

$$AT = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

em que $\boldsymbol{T}$ é o vetor das incógnitas do problema. A matriz A pode ser reescrita na forma $A = D - L - U$, e então transformada em

$$D\boldsymbol{T} = (L + U)\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} \tag{7}$$

Em que D é a matriz diagonal obtida de A, L é a matriz triangular inferior e U a matriz triangular superior, também obtidas de A. Se $D{-1}$ existir, isto é, se $aii \neq 0$ para cada i, pode-se aplicar os métodos iterativos abordados na forma matricial conveniente.

Considerando a forma matricial para o método de Gauss-Jacobi tem-se

$$\boldsymbol{T}^{(k)} = M_j\boldsymbol{T}^{(k-1)} + \boldsymbol{C}_j, \text{ para cada k=1, 2, ...} \tag{8}$$

onde $Mj = D{-1}(L + U)$ e $\boldsymbol{C}j = D{-1}\boldsymbol{b}$. As matrizes D, L e U vem da decomposição da matriz A, como mencionado anteriormente (Burden e Faires, 2008).

Para o método de Gauss-Seidel utilizou-se a forma matricial

$$\boldsymbol{T}^{(k)} = M_g\boldsymbol{T}^{(k-1)} + \boldsymbol{C}_g, \text{ para cada k =1, 2, ...} \tag{9}$$

onde $Mg = (D - L)\ {-1}U$ e $\boldsymbol{C}g = (D - L)\ {-1}\boldsymbol{b}$; as demais matrizes são como apresentadas anteriormente (Burden e Faires, 2008).

Para a condição de parada utilizou-se dois recursos, o número de iterações máximas de 27000 e tolerância de no máximo $1.e - 10$ (VARGAS, 2013).

Os resultados das soluções numéricas, para a variável de interesse, foram obtidos com um número de nós que vão de 3, 5, 9, ..., até 513 e, com isso obteve-se 8 malhas. As malhas contribuirão para a utilização de MER na verificação das ordens do erro de truncamento.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Tabela 1 a seguir mostra os resultados para 2128 iterações. Foram calculados a média da norma L1, que é a média do erro numérico, usada como critério de parada em ambos os métodos.

Pode-se verificar que o erro, com Gauss-Seidel cai mais rápido do que com Gauss-Jacobi.

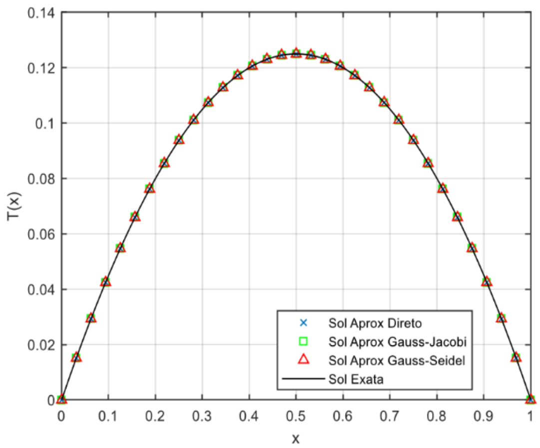
Tabela 1 – Erro para 2128 iterações

Métodos	Média da norma L1
Gauss-Jacobi	4.48526e-06
Gauss-Seidel	1.56405e-10

Fonte: Autoria própria

Na Figura 1, pode-se observar os resultados obtidos, para ambos os métodos foram utilizados 33 nós. Esses foram comparados com a solução analítica.

Figura 1 – Soluções da Equação de Poisson 1D



Fonte: Autoria própria

Para uma visualização mais clara, as Figuras 2 e 3 a seguir mostram os resultados obtidos com o método de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel respectivamente, mostrando a acurácia de ambos os métodos na solução. Na verificação cada um dos resultados foi comparado com a solução analítica.

Figura 2 – Soluções da Equação de Poisson 1D com Gauss-Jacobi

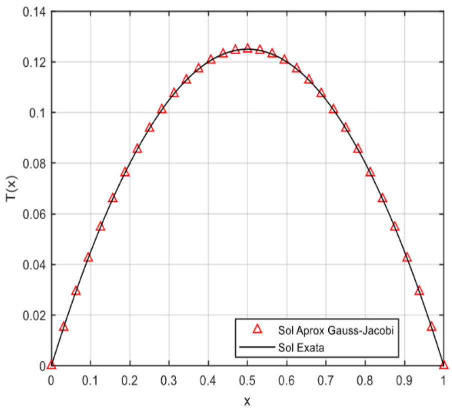
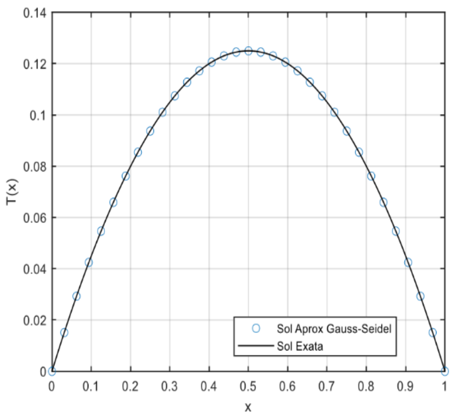


Figura 3 – Soluções da Equação de Poisson 1D com Gauss-Seidel

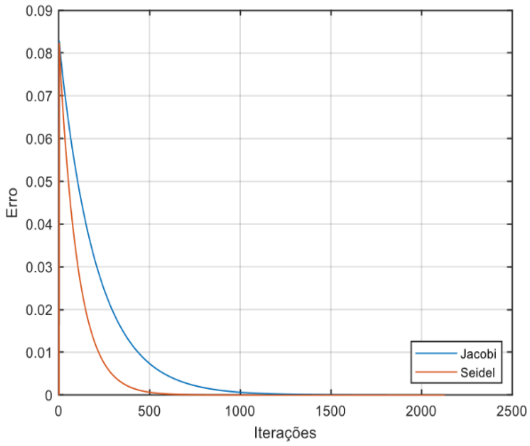


Fonte: Autoria própria

Gauss-Seidel converge mais rápido que o método Gauss-Jacobi e, além disso, é mais acurado (Franco, 2006).

A Figura 4 mostra o comportamento do erro dado pela norma L1, comprovando também o exposto acima.

Figura 4 – Erro da norma L1.



Fonte: Autoria própria

CONCLUSÕES

A solução da equação de Poisson 1D é bastante abordada em procedimentos numéricos e computacionais em análise numérica (VARGAS, 2013), porém, em muitos casos os procedimentos numéricos e computacionais, não são claros, dificultando o estudo do comportamento dos resultados. Uma das contribuições deste trabalho é tornar mais claro esses comportamentos para que se possa dar continuidade em pesquisas mais avançadas.

Os resultados obtidos pelos métodos iterativos apresentados comprovam, segundo a teoria, que o método de Gauss-Seidel converge mais rápido que o método de Gauss-Jacobi e, além disso, apresenta resultados mais acurados.

Na verificação da resposta, outros termos fontes, bem como a solução analítica apropriada e condições de contorno foram testados, e observou-se as mesmas conclusões. Todos os resultados numéricos são coerentes aos resultados analíticos.

REFERÊNCIAS

BUFFON, L. P. **Formulações do Método dos Elementos de Contorno para a análise mecânica de domínios planos não-homogêneos enrijecidos.** Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2018.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica.** Cengage Learning, São Paulo, 2008.

FRANCO, N. M. B.. **Cálculo Numérico**. Pearson Universidades, São Paulo, 2006.
Knupp, P. M., Salari, K.. “Verification of computer codes in computational science and engineering”, Chapman & Hall/CRC, New York, 2003.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics.** 9a ed., Wiley, 2006.

VARGAS, A. P. S. **Multiextrapolação de Richardson e Esquemas de 1ª e 2ª Ordens, Mistos e CrankNicolson sobre as Equações 2D de Advecção- Difusão e Fourier.** 2013. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013. Disponível em: http://www.pgmec.ufpr.br/teses/tese_028_ana_paula_da_silveira_vargas.pdf. Acesso em: 03 set. 2020.