https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2020

Exame de uma Cosmologia Newtoniana Modificada como teste da MOND Conservativa

Exame de uma Cosmologia Newtoniana Modificada como teste da MOND Conservativa

Pedro Lucas Teixeira Sega
pedrosega@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil

Ronaldo Penna Neves
ronaldopneves@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil

RESUMO

A dinâmica newtoniana modificada (MOND) surge como uma alternativa à matéria escura para explicar a ausência de massa em aglomerados de galáxias. Porém, a teoria original, quando estendida para uma modificação na segunda lei de Newton, não respeitas as leis de conservação de energia. Em trabalho pregresso, formulou-se com base na MOND, uma formulação das leis da mecânica onde ocorre a conservação de energia - a MOND conservativa – e que pode ser aplicada para explicar as leis de Kepler, um conceito já consolidado na física, além de manter os resultados da MOND para órbitas circulares. Com o objetivo de aumentar o escopo da teoria, desenvolveu-se um estudo da cosmologia newtoniana sob a perspectiva da MOND conservativa, comparando com os resultados presentes na versão convencional.

PALAVRAS-CHAVE: MOND. Matéria Escura. Dinâmica Modificada.

ABSTRACT

The Modified Newtonian Dynamics (MOND) appears as an alternative to Dark Matter to explain the absence of mass in galaxy clusters. However, the original theory, when extended to a modification of Newton's second law, does not respect the energy conservation laws. In previous work formulated based on MOND, it was created a formulation of the laws of mechanics where energy conservation occurs – conservative MOND - which can be applied to explain Kepler's laws, a concept already consolidated in physics, in addition to maintaining MOND results for circular orbits. In order to increase the scope of the theory, a study of Newtonian Cosmology was developed from the perspective of conservative MOND in comparison with the results present in the conventional version.

KEYWORDS: MOND. Dark Matter. Modified Dynamics.

Recebido: 19 ago. 2020.
Aprovado: 01 out. 2020.

INTRODUÇÃO

No ano de 1933, o astrônomo suíço Fritz Zwicky observou que os valores aferidos de massa luminosa não são suficientes para explicar as curvas de velocidades de rotação de galáxias espirais e aglomerados de galáxias. Tal incongruência resulta em duas possíveis soluções: ou existe uma quantidade imensa de algum tipo de matéria não bariônica, denominada de matéria escura, ou há uma falha na teoria que rege os movimentos dos corpos.

A dinâmica newtoniana modificada, ou simplesmente MOND, proposta pelo físico israelense Mordehai Milgrom, surge como uma alteração na teoria newtoniana. A modificação ocorre através de uma função de interpolação, que modifica a teoria padrão em valores de acelerações inferiores a uma constante, enquanto em valores superiores os resultados da teoria padrão são mantidos.

A MOND apresenta duas vertentes principais: a primeira sugere uma modificação na lei referente à gravitação, ao passo que a segunda sugere uma modificação em toda teoria geral do movimento. A primeira é a mais popularizada, pois não acarreta demais problemas físicos, enquanto a segunda não respeita as leis de conservação de energia.

Explorando a derivação que modifica toda a formulação newtoniana e através da compreensão de novos conceitos, é possível chegar a uma proposta com base na MOND que respeita a conservação de energia e mantém os principais resultados da teoria original, conforme foi apresentado no SICITE de 2019.

Um dos conceitos abrangidos pela modificação da MOND é a concepção de que em um regime MOND-iano ocorre uma nova ideia de passagem de tempo – o tempo efetivo – que é análogo ao conceito de tempo próprio presente na teoria da relatividade. Através dele, é possível desenvolver um conjunto de leis que constituem uma versão alternativa das leis da mecânica convencionais.

A dinâmica newtoniana padrão permite definir um conjunto de equações presentes na teoria da relatividade, porém, de um modo mais simplificado, denominada de Cosmologia Newtoniana. A formulação leva em conta o princípio cosmológico, sendo possível derivá-la da teoria da relatividade para campos gravitacionais fracos. Da mesma maneira, por meio da alteração na MOND é possível fazer um processo de modo análogo e realizar a análise dos resultados.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

De acordo com a MOND, a Segunda lei de Newton é descrita como o produto da massa, da aceleração e de uma função de interpolação μ:

$$\vec{F} = m\vec{a}\mu(z). \tag{1}$$

A função retorna à dinâmica newtoniana usual para valores de aceleração superiores a uma constante a_0, descrita como sendo $a_0 = 1{,}2 \times 10^{-12}\ cm/s^2$, e para valores inferiores, o movimento dos corpos é regido por um novo conjunto de regras. A relação de dependência $\mu(z)$ - mais precisamente - assume a forma $\mu \approx 1$ para $a >> a_0$ e $\mu = a / a_0$ para $a << a_0$, portanto para o regime da MOND:

$$\vec{F} = m\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}. \tag{2}$$

A principal implicação física da vertente da teoria de Milgrom, que modifica a segunda lei da dinâmica, é a ausência de conservação da energia. Problema esse contornado por meio da inclusão do conceito de tempo efetivo, que permite a formulação de uma nova dinâmica para sistemas físicos com baixas acelerações.

A relação do tempo efetivo com o tempo padrão é dada por:

$$d\tilde{t} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}dt. \tag{3}$$

Definindo a velocidade sob a perspectiva do tempo efetivo:

$$\vec{\tilde{v}} = \frac{d\vec{r}}{d\tilde{t}} = \sqrt{\mu}\frac{d\vec{r}}{dt} = \sqrt{\mu}\vec{v}. \tag{4}$$

Dessa forma o momento linear efetivo é descrito como sendo:

$$\vec{\tilde{p}} = m\vec{\tilde{v}} = m\frac{d\vec{r}}{d\tilde{t}} = m\sqrt{\mu}\frac{d\vec{r}}{dt} = \sqrt{\mu}m\vec{v}. \tag{5}$$

De acordo com o princípio fundamental da dinâmica, a força resultante sobre um corpo é definida como a taxa de variação instantânea da quantidade de movimento, portanto:

$$\vec{\tilde{F}} = \frac{d\vec{\tilde{p}}}{d\tilde{t}} = \sqrt{\mu}\frac{d}{dt}(\sqrt{\mu}m\vec{v}) = \mu m\vec{a} + \frac{1}{2}m\mu'\frac{\dot{a}}{a_0}m\vec{v}. \tag{6}$$

Onde μ' corresponde à primeira derivada de μ em relação à variável z.

Enquanto na MOND original não existe conservação de energia, através do tempo efetivo é possível obter uma teoria onde as leis de conservação de energia são respeitadas, podendo ser comprovada pelo teorema trabalho energia cinética:

$$W = \int_a^b \frac{d\vec{\tilde{p}}}{d\tilde{t}} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \sqrt{\mu}\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{\tilde{p}} = m\int_a^b \sqrt{\mu}\vec{v} \cdot d\left(\sqrt{\mu}\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\mu m(v_b^2 - v_a^2) = \Delta\tilde{K}. \tag{7}$$

Portanto a Energia Cinética efetiva é:

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}m\tilde{v}^2 = \frac{1}{2}\mu m v^2. \tag{8}$$

Da forma que o trabalho é definido como a diferença entre o valor inicial e o valor final da energia potencial:

$$W = U_a - U_b. \tag{9}$$

Por consequência:

$$\tilde{K}_a + U_a = \tilde{K}_b + U_b. \tag{10}$$

Logo, a Energia Mecânica Efetiva é definida como:

$$\tilde{E} = \tilde{K} + U. \quad (11)$$

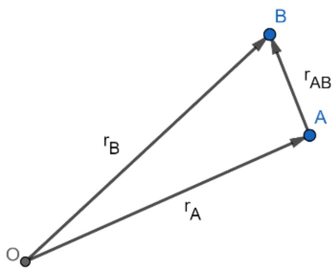
A teoria padrão para a gravitação é a Teoria da Relatividade Geral, proposta por Albert Einstein, no ano de 1915. Entretanto, podemos obter equações importantes presentes na teoria de Einstein, através da Mecânica Newtoniana. Tal formulação é denominada de Cosmologia Newtoniana.

O Princípio Cosmológico, no qual se baseia a Cosmologia Newtoniana, afirma que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. E como consequência do Princípio Cosmológico, o universo pode se movimentar apenas no sentido de expansão ou contração.

A ideia de um universo em expansão tomou forma a partir do ano de 1929, quando o astrônomo Edwin Hubble, constatou a presença de desvios para o vermelho, ou redshifts, ao observar diversas galáxias, e que esses desvios apresentavam proporcionalidade às distâncias entre as galáxias. Tal propriedade representa que existe uma expansão do universo em todas as direções e é denominada Lei de Hubble.

Considere duas galáxias posicionadas nos pontos A e B, desconsidere quaisquer movimentos provenientes de atrações gravitacionais, e assume que o tempo *t* de separação entre elas depende somente da expansão presente.

Figura 1 – Galáxias posicionadas nos pontos A e B do sistema de coordenadas.



Fonte: Autoria Própria

Todos os observadores assistem as galáxias se expandindo com a mesma lei de Hubble, de tal forma que a velocidade da galáxia A é representada por:

$$\vec{v}_B = H_0 \,.\vec{r}_B. \quad (12).$$

Da mesma forma para B:

$$\vec{v}_B = H_0 \,.\vec{r}_B. \quad (13)$$

De tal modo que:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = H_0 \,(\vec{r}_B - \vec{r}_{A)}. \quad (14)$$

Sendo H_0 o parâmetro de Hubble no tempo presente. Na forma geral H é definido como:

$$H(t) = \frac{\dot{A}}{A}. \quad (15)$$

Com A sendo o fator de escala, que mede as variações geradas pela variação do universo.

Em um universo homogêneo, um objeto que se move juntamente com o substrato apresenta uma velocidade puramente radial, que é proporcional à sua distância do observador. Podemos reescrever a equação para um sistema de coordenadas que variam juntamente com a expansão, esse sistema recebe o nome de coordenadas comoventes e são constantes no tempo. Ao passo que o vetor que expressa a distância entre os pontos A e B pode ser escrito em termos da coordenada comovente x e de um fator de escala *A(t)*:

$$\vec{r}_{BA} = A(t).\ \vec{x}_{BA}. \qquad (16)$$

Portanto a velocidade fica definida como:

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{\dot{A}}{A}\vec{r}_{BA}. \qquad (17)$$

Considere uma esfera de raio *R* centrada na origem e um conjunto de forças atuando em um conjunto de pontos *A*, *B*, *C* e *D,* todos pertencentes à superfície da esfera. De acordo com o teorema de Birkhoff, o efeito gravitacional de um meio externo na superfície de uma esfera é nulo. Portanto, a força gravitacional que atua em *A*, *B*, *C* e *D* é a atração gravitacional da matéria interna em um ponto localizado na origem. A energia proveniente total é:

$$E = K + U = \frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{4}{3}\,\pi G\rho r^2 m. \qquad (18)$$

Onde ρ é a densidade de matéria no interior da esfera, *r* é o raio da esfera, *m* a massa da partícula e *G* faz referência à constante gravitacional.

Substituindo as equações (16) e (17) em (18):

$$E = \frac{1}{2}\,m\,\dot{A}^2x^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho A^2x^2m. \qquad (19)$$

Rearranjando os termos, obtém-se:

$$\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 = H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{kc^2}{A^2}. \qquad (20)$$

Onde *k* é um parâmetro independente de *x* e imutável no tempo, já que sua primeira derivada temporal em *x* é nula, definido como sendo:

$$k = -\frac{2E}{mx^2c^2}. \qquad (21)$$

Caso *k* adquira um valor maior que zero, o universo sofre uma fase de expansão seguida de uma fase de contração. Para *k* com um valor menor que zero, o universo não é ligado de forma gravitacional, portanto a expansão ocorrerá eternamente. Para um valor de *k* igual a zero, a expansão terá um comportamento assintótico tendendo a zero.

Incluindo a constante cosmológica Λ na equação (20), define-se a equação de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 = H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{kc^2}{A^2} + \frac{\Lambda}{3}. \tag{22}$$

No contexto da Cosmologia Newtoniana, a constante cosmológica assume o significado de menor energia presente em um determinado campo físico, de tal modo que assume como valor:

$$\Lambda = 8\pi G\rho_v. \tag{23}$$

Com ρ_v correspondendo a densidade de energia do vácuo.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

EQUAÇÃO DE FRIEDMANN COM BASE NA MOND CONSERVATIVA

Através da equação (11) podemos definir a Energia Mecânica Efetiva como a diferença entre a Energia Cinética Efetiva e a Energia Potencial. De tal modo que podemos reescrever a equação (18), no regime da MOND Conservativa da forma:

$$\tilde{E} = \tilde{K} + U = \frac{1}{2}\mu m v^2 - \frac{4}{3}\frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}\mu m v^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho r^2 m. \tag{24}$$

Reorganizando os termos em função da energia mecânica convencional:

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}\mu m v^2 - \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}(\mu - 1)mv^2 + E. \tag{25}$$

Reescrevendo (24) em função do parâmetro de Hubble:

$$\mu H^2 = \mu\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho + \frac{2\tilde{E}}{mx^2A^2}. \tag{26}$$

Reformulando a equação:

$$\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + (\mu - 1)\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{2\tilde{E}}{mx^2A^2}. \tag{27}$$

Substituindo os resultados da equação (25) em (27) obtém-se:

$$\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + (\mu - 1)\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho + \frac{2E}{mx^2A^2} + \frac{(\mu - 1)v^2}{x^2A^2}. \tag{28}$$

Substituindo a equação (17) em (28):

$$\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + (\mu - 1)\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho + \frac{2E}{mx^2A^2} + \frac{(\mu - 1)\dot{A}^2}{A^2}. \tag{29}$$

Simplificando os termos, obtém-se como resultado:

$$\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho + \frac{2E}{mx^2A^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho + \frac{k(t)c^2}{A^2}. \tag{30}$$

Contudo k foi definido nas equações (20) e (21) como um valor constante. Nesse caso temos que k representa uma função do tempo, sendo descrita como:

$$k(t) = \tilde{k}(x) + (\mu - 1)\frac{\dot{A}^2}{c^2}. \tag{31}$$

Sendo que:

$$\tilde{k}(x) = -\frac{2\tilde{E}}{mx^2c^2}. \tag{32}$$

A Energia Mecânica Efetiva tem sua compreensão estendida para a seguinte forma:

$$\tilde{E} = E(t) + (\mu - 1)K = E(t) + \frac{1}{2}(\mu - 1)m\dot{A}^2x^2. \tag{33}$$

Logo, a Energia Mecânica passa a ser uma função do tempo, portanto, sua derivada temporal é diferente de zero. Enquanto a Energia Mecânica Efetiva é constante, apresentando sua primeira derivada temporal nula.

Acrescentando a constante cosmológica na equação (30), obtém-se a equação de Friedmann sob a perspectiva da MOND Conservativa:

$$\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho + \frac{k(t)c^2}{A^2} + \frac{\Lambda}{3}. \tag{34}$$

CONCLUSÃO

As leis de conservação de energia constituem uma das bases da Cosmologia Newtoniana. Uma vez que a teoria proposta por Milgrom não as respeita, produzir uma teoria consistente através dela torna-se inviável. Como o foco da MOND Conservativa é exatamente a conservação de energia, desenvolver uma formulação para a cosmologia é uma tarefa factível.

O conceito de tempo efetivo permite retornar à Dinâmica Newtoniana para valores de aceleração superiores a um valor constante, e tal fato continua consistente na formulação da Cosmologia Newtoniana, mediante a MOND Conservativa, o que torna a teoria newtoniana um limite da teoria proposta, para regimes com elevadas acelerações.

A principal implicação da Cosmologia Newtoniana com base na MOND Conservativa é a energia mecânica atuando como uma função do tempo, enquanto a Energia Mecânica Efetiva é constante no tempo. Tal conclusão se estende para o resultado principal que é a equação de Friedmann, pois a torna dependente de um parâmetro que pode sofrer variação no tempo.

REFERÊNCIAS

COSTA, F. E. M. **Compreendendo o Universo numa Perspectiva Newtoniana**. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/rbef/v40n2/1806-1117-rbef-40-02-e2308.pdf. Acesso em: 03 jan. 2020.

HARRISON, E. R. **Cosmology, the science of the universe**. 2. Ed. New York: Cambridge University Press, 200. ISBN: 978-0-521-66148-5.

MILGROM, M. **A modification of the Newtonian Dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis**. Disponível em: https://doi.org/10.1086/161130. Acesso em: 03 jan. 2020.

SANDERS R. H. **Cosmology with Modified Newtonian Dynamics (MOND)**. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/astro-ph/9710335v1.pdf. Acesso em: 19 dez. 2019.