https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2020

Considerações a respeito das Formas Indeterminadas do Cálculo

Considerations about Indeterminate Forms of Calculus

Luiz Gabriel Martins
Luizgabrielmartins2014@hotmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Araceli Ciotti de Marins
araceli@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Anderson Alves Miguel
ander.alves.miguel123@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Rodrigo Matheus Ritter
ritter.rodrigo4@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

RESUMO

As indeterminações são um conjunto de expressões que podem surgir do cálculo do limite de determinadas funções e são caracterizadas por não deter um valor fixo, podendo este ser um número finito, divergir para infinito ou simplesmente não existir. Normalmente a discussão sobre a temática é limitada apenas a exemplos e ferramentas para resolução, sem passar por uma discussão formal. Neste contexto, este trabalho visou realizar uma apresentação formalizada do conceito das expressões indeterminadas. Para tanto, foi necessário realizar uma revisão bibliográfica em livros do âmbito do Cálculo e Análise Real. Através desse estudo, foi produzido um texto de caráter mais formal a respeito da temática, bem como, provado que essas expressões não podem ser determinadas. A análise da demonstração revelou que os principais fatores para garantir isso são: o fato que grande parte das expressões estão ligadas a operações não comutativas; e o conceito de infinito não é um número, mas sim uma notação que descreve o comportamento de determinadas funções que crescem (ou decrescem) indefinidamente.

PALAVRAS-CHAVE: Limites. Cálculo. Análise.

ABSTRACT

Indeterminations are a set of expressions that may come from the calculation of the limit of certain functions and are characterized by not having a fix value, which may be a finite number, diverge to infinite or simply not exist. Usually the discussion on the topic is limited to examples and tools for resolution, without going through a formal discussion. In this context, this work aims to make a formal presentation of the concept of indeterminate expressions. For that, it was necessary to carry out bibliographic reviews in books of the scope of Calculus and Real Analysis. Through this study, a more formal text about the theme was produced, as well as, proved that these expressions cannot be determined. The analysis of the demonstration revealed that the main factors to ensure this are the fact of the most of the expressions are linked to non-commutative operations and that the concept of infinity is not a number, but a notation that describes the behavior of certain functions that grow (or decrease) indefinitely.

KEYWORDS: Limits. Calculus. Analysis.

Recebido: 19 ago. 2020.
Aprovado: 01 out. 2020.

INTRODUÇÃO

O termo **indeterminação**, de modo geral, designa algo ou alguma coisa que não se pode definir com clareza ou precisão. No contexto matemático, em particular, essa palavra pode adquirir diferentes sentidos, como é o caso em Álgebra Linear, cuja expressão aparece para classificar sistemas de equações que possuem infinitas soluções. Enquanto que, em Cálculo, se refere a um conjunto de expressões que surgem no cálculo de limites de funções (DESANTI, 2017). Lima (2019) acrescenta que essas expressões não tem sentido aritmético, pois dependendo da escolha das funções o limite pode resultar (ou não) um número real qualquer finito ou simplesmente não existir.

Essas expressões também são conhecidas como **Expressões Indeterminadas** ou **Formas Indeterminadas**, cuja nomenclatura pode variar a depender do autor do livro. Historicamente, este último, aparece sendo empregado no século XIX por um dos estudantes de Cauchy para se referir ao conjunto das expressões, que são apresentadas em (5). Porém, cada uma delas já se manifestou anteriormente, de modo isolado e, em alguns casos, por exemplos individuais, até passarem a ser generalizados.

Em geral, é este o tratamento que alguns livros de Cálculo fornecem aos estudantes sobre a temática, apresentam exemplos de limites de funções que conduzem a esta forma e ferramentas para sua resolução, sem dar muita atenção ao aspecto formal. Neste contexto, este trabalho objetiva discutir dentro de uma perspectiva formal e, ao fim, fornecer demonstrações que comprovem que essas expressões são, de fato, indeterminadas.

MATERIAL E MÉTODOS

Para o desenvolvimento deste trabalho, foi necessária a revisão bibliográfica a respeito das Formas Indeterminadas tanto, no âmbito do Cálculo (LEITHOLD, 1994), quanto da Análise Matemática (LIMA, 2012; LIMA, 2007), procurando encontrar uma definição exata, alguns exemplos e quais ferramentas são empregados na resolução de limites, quando os mesmos resultam em determinadas indeterminações.

Durante a revisão bibliográfica também foi necessário estudar outros tópicos, importantes para uma compreensão clara sobre a temática, como noções topológicas. A partir desse estudo foi realizar a confecção de um resumo contendo os principais aspectos vistos e apresentar uma demonstração que comprove que as expressões são, de fato, indetermináveis.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Antes de se questionar sobre o limite de uma função, em certo ponto, é preciso garantir sua existência. Essa constatação pode ser obtida estudando os valores da função que estão à direita e a esquerda do ponto de interesse.

Além disso, o ponto de interesse deve pertencer ao conjunto de pontos de acumulação do domínio da função. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Um ponto a será dito ponto de acumulação de X quando para todo $\varepsilon > 0$, se tenha

$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\cap X\setminus\{a\}\neq\emptyset$. O conjunto de pontos de acumulação de X será denotado por X'.

É importante que o ponto de interesse seja de acumulação, para que seja possível analisar os valores que a função assume a medida que os pontos se tornam cada vez mais próximos do de interesse. No caso de aproximarem (tanto a direita, quanto pela esquerda) a um mesmo valor, então o limite existe e corresponde a este valor. Em outros termos, de maneira precisa, sejam $X\subset\mathbb{R}$, $f:X\to\mathbb{R}$ e $a\in X'$. Será dito que L é o **limite** de $f(x)$ quando x tende para a e denotado por

$$L=\lim_{x\to a} f(x), \tag{1}$$

quando para todo $\varepsilon>0$, existir $\delta>0$ de tal modo que se $0<|x-a|<\delta$, $x\in X$ então $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Nesse sentido, além da necessidade de verificar o comportamento desta função nas proximidades do ponto, precisamos garantir que o ponto é de acumulação, já que esse estudo se baseia nas vizinhanças deste ponto.

Uma consequência imediata da definição é que o limite é único. Se não fosse assim, suponha que L e M são limites de f quando x tende para algum ponto. Como $L\neq M$, tomando $\varepsilon=\frac{|L-M|}{2}>0$, existem δ_1, $\delta_2>0$ tais que

$$\begin{cases} 0<|x-a|<\delta_1,\ x\in X\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon \\ 0<|x-a|<\delta_2,\ x\in X\Rightarrow|f(x)-M|<\varepsilon \end{cases}. \tag{2}$$

Seja $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Deste modo, se tem que

$$|L-M|\leq|L-f(x)|+|f(x)-M|<2\varepsilon=|L-M|, \tag{3}$$

uma contradição. Portanto, quando o limite existir, este deve ser único.

Outra observação importante segue da negação da definição, que nos diz que um número L não é limite, quando existir um número real $\varepsilon>0$ tal que para qualquer $\delta>0$ existe um ponto $x_\delta\in X$ que satisfaça $0<|x_\delta-a|<\delta$ e implique em $|f(x_\delta)-L|\geq\varepsilon$. Por outro lado, escolhendo $\delta=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots$ se obtém uma sequência (x_n) tal que $x_n\to a$ e $|f(x_\delta)-L|\geq\varepsilon$. Isto é, para provar que o limite não existe, é suficiente apresentar duas sequências de números reais (x_n) e (y_n) que convergem para o ponto a, tais que as sequências associadas $(f(x_n))$ e $(f(y_n))$ convergem para valores distintos. No entanto, se para qualquer sequência (x_n) escolhida, com $\lim x_n=a$, sempre se obtiver $\lim f(x_n)=L$, então o limite existe e é igual a L.

Ao estabelecer essa relação entre limites de funções e o de sequências derivam diretamente três propriedades interessantes, que estão relacionada a aritmética dos limites. Suponha que existe o limite para duas funções f e g em certo ponto a (que pode estar ou não no domínio) e que eles valem L e M, respectivamente. Então, existem os limites para função soma $f+g$ e produto $f\cdot g$ são iguais a $L+M$ e $L\cdot M$, nesta ordem. Além disso, quando $M\neq 0$, o limite do quociente f/g existe e é igual a L/M. É claro que, existem outras propriedades que também derivam dessa relação, no entanto, são estas que terão um papel interessante o qual será visto mais a frente. É claro que as propriedades acima dependem do limite de f e g possuírem limites.

Conforme observado, existem situações em que a função estudada não possui limite. Em particular, há uma delas que ocorre o seguinte: a medida que se tomam intervalos de centro em um ponto fixo e raio, que pode se tornar tão pequeno quanto queira, os valores obtidos pela função crescem (ou decrescem) indefinidamente, sem um limitante máximo para este crescimento (ou decrescimento). Para esta situação, em específico, será dito que o seu limite é infinito (menos infinito).

De maneira mais precisa, sejam $X\subset R$, $f:X\to R$ e $a\in X'$. Será dito que o limite de $f(x)$ é mais infinito, quando x tende para a, e escrito como

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty, \tag{4}$$

se, para cada valor real $A>0$ arbitrário, pudermos obter um outro número real positivo $\delta>0$ de tal forma que $f(x)>A$, sempre que $0<|x-a|<\delta$, $x\in X$. De maneira parecida define-se quando $f(x)$ tende para menos infinito. Neste caso denota-se por $-\infty$ e exige-se que $f(x)<-A$. Uma observação especial a ser feita é que $\pm\infty$ não são números, apenas notações que descrevem o comportamento, na vizinhança de um ponto, de uma classe particular de funções que não possuem limites. Um descuido com este detalhe (de que $\pm\infty$ não são números) pode levar ao uso indevido das operações aritméticas dos limites que foram definidas anteriormente. Por exemplo, se tivermos duas funções que divergem para mais infinito, não é possível afirmar, em geral, que o limite da subtração vá para zero, ou então, que o quociente convirja para um. Apesar de ambos divergirem para infinito, isso pode não ocorrer mesma proporção, ou seja, existe uma ordem de quem diverge mais rápido e essa velocidade de divergência acaba por influir nos casos dos limites citados anteriormente, que podem existir e ser um número real finito, ou então, divergir para infinito ou simplesmente não existirem, o conjunto de expressões que possuí essa propriedade recebe o nome de formas indeterminadas.

As formas indeterminadas são compostas por um grupo de sete expressões que são

$$\frac{0}{0},\ 0^0,\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty^0, 1^\infty, 0\cdot\infty, \infty-\infty. \tag{5}$$

Essas formas recebem esse nome, pois não é possível, de forma geral, dizer algo a respeito do limite, o que será provado na sequência.

Teorema. As expressões $\frac{0}{0}$, 0^0, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, 1^∞, $0\cdot\infty$ e $\infty-\infty$ são indetermináveis.

Demonstração: Suponha que as expressões sejam determináveis. Então, para toda função tal que o limite tende para alguma dessas expressões, o limite existe ou não. É fácil mostrar que o segundo caso é absurdo e, portanto, o limite deve existir. Logo, para cada uma das expressões, existe um número (finito ou não) que corresponde ao valor deste limite.

Seja $X\subset R$, não vazio, e a um ponto de acumulação de X. Escolha ϕ, $\varphi:X\to R$ de tal modo que se tenha $\lim_{x\to a} \phi(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)= +\infty$. Além disso, tome $c>0$ qualquer, desde que diferente de 1. Note que ainda se tem $\lim_{x\to a} c\cdot\varphi(x)=+\infty$. Daí

$$L= \lim_{x\to a} \frac{c\cdot\varphi(x)}{\phi(x)} = c\cdot\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = c\cdot L \Rightarrow L(1-c) = 0, \tag{6}$$

então $c=1$ou $L=0$. Como tomamos $c\neq 1$, só pode ser o caso que $L=0$. Por outro lado, se $\varphi(x)=\phi(x)$, temos que o quociente ϕ/φ é igual a 1 (desde que $\phi(x)$ não se anule). Entretanto, pela equação (6), sabemos que o limite do quociente é 0 e, portanto, 0=1, uma contradição. Portanto, a expressão $\frac{\infty}{\infty}$ não é determinável.

Agora, definiremos as funções $\zeta, \xi, \tau: X \to R$ de tal modo que se tenha $\lim_{x\to a} \zeta(x) = \lim_{x\to a} \xi(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} \tau(x) = 1$. Seja $Z \subset \mathbb{R}$ um subconjunto tal que $Z=\{x \in X | \zeta(x) \neq 0, \xi(x) \neq 0\}$ e suponha que $a \in Z'$ (neste conjunto há sentido em indagar sobre o limite no ponto a da função racional). Nestas condições, seguem que:

$$\lim_{x\to a} \frac{\zeta(x)}{\xi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{\xi(x)}}{\frac{1}{\zeta(x)}} = \frac{+\infty}{+\infty}, \tag{7}$$

$$\lim_{x\to a} \varphi(x)\zeta(x) = \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\zeta(x)}} = \frac{+\infty}{+\infty}. \tag{8}$$

Observe que $\frac{0}{0}$ e $0 \cdot \infty$ são determináveis se, e somente se, $\frac{\infty}{\infty}$ for também. Como $\frac{\infty}{\infty}$ não é determinável, então as outras duas expressões também não são.

Nos outros casos, para se indagar sobre o seu limite deverá ser definido um novo domínio adequado e conveniente. Assim, seja $W=\{x \in X | \tau(x)>0, \ \zeta(x)>0, \phi(x)>0, \ \xi(x)>0\}$ e suponha que $a \in W'$. Deste modo:

$$\lim_{x\to a} \left(\tau(x)\right)^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} e^{\varphi(x) \ln \tau(x)} = e^{\lim_{x\to a} \varphi(x) \ln \tau(x)} = e^{\infty \cdot 0}, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to a} \left(\varphi(x)\right)^{\zeta(x)} = \lim_{x\to a} e^{\zeta(x) \ln \varphi(x)} = e^{\lim_{x\to a} \zeta(x) \ln\left(\varphi(x)\right)} = e^{0 \cdot \infty}, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to a} \left(\zeta(x)\right)^{\xi(x)} = \lim_{x\to a} e^{-\xi(x)(-\ln(\zeta(x)))} = e^{\lim_{x\to a} (-\xi(x))(-\ln\left(\zeta(x)\right))} = e^{0 \cdot \infty}. \tag{11}$$

Novamente, temos que 0^0, 1^∞ e ∞^0 são determináveis se, e somente se, $0 \cdot \infty$ for, o que não é o caso.

Resta mostrar que não se pode ter um limite fixo para o caso que $\infty - \infty$. Ora, se o limite da diferença $\phi(x)-\varphi(x)$ corresponde a algum número M, então para diferença $\varphi(x)-\phi(x)$ também vale M. Então

$$M=\lim_{x\to a} \varphi(x)-\phi(x) = -\left(\lim_{x\to a} \phi(x)-\varphi(x)\right) = -M \Rightarrow M=0. \tag{12}$$

Nestas condições, não há possibilidades de M ser infinito, pois isso acarretaria que o limite da diferença inversa corresponderia ao infinito com sinal inverso, que seria um absurdo. No entanto, se escolhermos uma constante positiva $k \neq 1$, ainda vale $\lim_{x\to a} k\phi(x) = +\infty$. Logo

$$M=\lim_{x\to a} \phi(x)-k\phi(x) = (1-k)\lim_{x\to a} \phi(x) \Rightarrow k=1, \tag{13}$$

que não pode acontecer. Portanto, nenhuma das formas enunciadas pode ser determinável. Assim, se conclui que elas são indetermináveis.

Observa-se que a mesma demonstração pode ser aplicada para o caso de limites laterais ou infinitos, desde que sejam feita as devidas adequações.

CONCLUSÕES

Como já dito, as formas indeterminadas se referem a um conjunto de sete expressões que surgem na tentativa de calcular o limite de determinadas funções em algum ponto (podendo ser finito ou não). São ditas dessa maneira, pois não é possível estabelecer um comportamento geral para todos os casos. Para alguns deles, o limite existe e é um número real qualquer ou diverge para mais infinito, enquanto que para outros, o limite não existe.

Ao tentar fazer qualquer suposição sobre o seu valor, pode se encontrar uma inconsistência. Com exceção das duas primeiras expressões indeterminadas, que são $\frac{0}{0}$ e 0^0, todas as demais resultaram num absurdo porque buscou supor que infinito fosse um número que podia ser manipulado e, além disso, usou-se do fato que as a subtração e divisão não são operações comutativas, geralmente, e, portanto, o valor do limite recaiu para aqueles que valem essa propriedade que são o 0 e 1, respectivamente. E daí basta tomar contraexemplos sutis (de uma maneira generalizada) para observar o absurdo. É claro que isso só é lícito porque se assumiu que existia um valor fixo para o limite de qualquer função que levasse a alguma daquelas formas. Também não pode ser dito que não existe valor para nenhuma dessas expressões, pois é fácil desmentir essa hipótese.

As expressões $\frac{0}{0}$ e 0^0 foram provadas serem indeterminadas como consequência das outras formas. No entanto, uma vez que 0 é um número, é possível discutir os motivos para não serem determináveis a partir de outros conceitos, que estão relacionados com os campos da Álgebra e Análise Real, que não é o escopo desse trabalho.

Apesar de não poder estabelecer um valor fixo para essas expressões, o cálculo de seu limite só é possível porque existem outras estratégias, muito utilizadas em livros de Cálculo, que envolvem técnicas de fatoração, simplificação e diferenciação, por meio da regra de L'Hôpital (voltada para as indeterminações $0/0$ e ∞/∞).

É claro que, o propósito desse trabalho não é estabelecer que todo aluno deva conhecer a formalização das formas indeterminadas, mas ao contrário, disponibilizar um material para uma discussão mais profunda para aqueles que são mais curiosos, mesmo aqueles que não são de cursos de Matemática, mas que tem em sua grade a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, ou para professores de matemática, em geral.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a professora orientadora por auxiliar no desenvolvimento deste trabalho, como também, os colegas que estiveram presentes.

REFERÊNCIAS

DESANTI, D. M. **Indeterminações**. 80. p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2758/1/CT_PROFMAT_M_Desanti%2C%20Diego%20Mathias_2017.pdf. Acesso em: 10 mar. 2020.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. v. 1.

______. **Análise Real, volume 1**: funções de uma variável real. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.