

Estudo comparativo entre soluções numéricas e analíticas para um escoamento de fluido lei de potência em tubo circular

Comparative study between numerical and analytical solutions for a power law fluid flow in a circular pipe

RESUMO

No presente trabalho são apresentados os resultados das simulações numéricas realizadas no software Star-CCM+ para o escoamento em tubos circulares de fluidos não newtonianos e comparados com as soluções analíticas. O fluido analisado é do tipo *power-law*. A solução analítica é obtida na forma adimensional para exibir os grupos de variáveis que controlam as equações de transporte. Os problemas de convergência e desenvolvimento de malha são tratados em diversos casos especiais. Os resultados apresentam uma ótima concordância entre as soluções numéricas e analíticas, após a identificação de uma malha com resolução apropriada. Em outras palavras, os resultados obtidos na simulação numérica representam bem a solução analítica, tanto para os aspectos cinemáticos quanto para os aspectos dinâmicos do escoamento.

PALAVRAS-CHAVE: Fluidos não-newtonianos. Solução numérica. Solução analítica.

ABSTRACT

In the present study, the numerical simulations results performed in the Star-CCM + software for the flow in circular pipes of non-Newtonian fluids are presented and compared with the analytical solutions. The analyzed fluid is of the power-law type. The analytical solution is obtained in a dimensionless way to display the groups of variables that control the transport equations. Convergence and mesh development problems are addressed in several special cases. The results show an excellent agreement between the numerical and analytical solutions, after an appropriate grid resolution was found. In other words, the results obtained in the numerical simulation represent well the analytical solution, both for the cinematic aspects and for the dynamic aspects of the flow.

KEYWORDS:

Non-Newtonian fluids. Numerical solution. Analytical solution.

Sarah Nunes Argentin
sarahargentini@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

Alan Lugarini Souza
alansouza@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

Admilson Teixeira Franco
admilson@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

Fluidos cuja reologia é bastante complexa são de grande interesse em diversas aplicações industriais. Tendo como exemplo, o processo de perfuração de poços de petróleo onde se deseja um fluido com uma viscosidade elevada o suficiente para carrear os cascalhos e baixa o suficiente para ser bombeado em tubulações com mais de cinco mil quilômetros de profundidade. Ademais, nos casos de interrupção no bombeio, espera-se que o fluido possua certa tensão limite de escoamento, para que os cascalhos continuem em suspensão.

Tal associação de características pode ser encontrada em fluidos não newtonianos. O qual consiste em um fluido cuja tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional à taxa de deformação. Como consequência, eles podem ou não ter uma viscosidade bem definida.

Este trabalho, um dos primeiros realizados na iniciação científica, teve como objetivo encontrar um *setup* de simulação que solucionasse o modelo de fluido não newtoniano *Power-law* para uma ampla faixa de valores de n . Assim, será analisado por soluções analíticas e numéricas, com o intuito de corroborar com os resultados obtidos pelo software *STAR-CCM+*[®]. Será estudado o escoamento em tubo circular, com velocidade de entrada uniforme e pressão constante na saída.

METODOLOGIA

Modelo *Power-law*

Para caracterizar a resposta dinâmica de fluidos não newtonianos que estão sujeitos ao cisalhamento, utiliza-se a viscosidade aparente η . A qual é definida como a taxa de proporcionalidade entre taxa de deformação ($\dot{\gamma}$) e tensão de cisalhamento (τ) (BIRD; ARMSTRONG; HASSAGER, 1987):

$$\tau_{xy} = -\eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{yx} \quad (1)$$

Para algumas aplicações na indústria, apenas a região onde a viscosidade é variável interessa. E é precisamente este o comportamento previsto pelo modelo *Power Law* de Ostwald (1925) e De Waele (1923):

$$\eta = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad (2)$$

Onde n [adimensional] é o índice de potência e k [Pa.s ^{n}] é o fator de consistência.

Solução analítica

No caso de um regime completamente desenvolvido, balanceia-se a queda de pressão apenas pela tensão de cisalhamento no fluido. Para um elemento cilindro diferencial r é a direção radial e z é a direção axial, onde o balanço de forças acarreta em (BIRD; ARMSTRONG; HASSAGER, 1987):

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) \quad (3)$$

Como o gradiente de pressão é constante, pode-se resolver a taxa de cisalhamento por integração:

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2} \left(-\frac{dp}{dz} \right) + \frac{C_1}{r} \quad (4)$$

Para que se tenha uma tensão de cisalhamento finita no centro do tubo, devemos considerar a constante C_1 nula. Logo,

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (5)$$

Substituindo a expressão da equação (1) em τ_{rz} , temos:

$$k \left(-\frac{dV_z}{dr} \right)^n = \frac{r}{2} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (6)$$

Para obter a velocidade V_z , devemos integrar a equação (6):

$$V_z = \left(-\frac{dp}{dz} \right)^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{1}{n}} \frac{n r (r/k)^{\frac{1}{n}}}{(n+1)} + C_2 \quad (7)$$

Para obter o valor de C_2 , devemos utilizar as seguintes condições de contorno: $V_z = 0$ e $r = R$. Assim,

$$C_2 = \left(-\frac{dp}{dz} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n R (R/k)^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} (n+1)} \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7):

$$V_z = \left(-\frac{dp}{dz} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n R^{\frac{1}{n}+1} \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}+1}}{2^{\frac{1}{n}} (n+1) k^{\frac{1}{n}}} \quad (9)$$

Para normalizar a velocidade, faz-se necessário obter a equação para a velocidade média.

$$\bar{V} = \int_A \frac{V_z}{A} dA \quad (10)$$

Logo,

$$\bar{V} = \left(-\frac{dp}{dz} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{2 n R^{\frac{1}{n}+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1} \right)^{\frac{1}{n}+1}}{2^{\frac{1}{n}} (n+1) k^{\frac{1}{n}}} \quad (11)$$

Levando-se em conta que o escoamento tem vazão volumétrica e propriedades constantes, são aplicadas as seguintes normalizações:

$$\tilde{r} = \frac{r}{D/2}; \tilde{z} = \frac{z}{D}; \tilde{V} = \frac{V_z}{\bar{V}}; \tilde{p} = \frac{p}{1/2 \rho U^2} \quad (12)$$

onde D é o diâmetro do tubo, \bar{V} é a velocidade média e ρ é a massa específica. Após manipulações, a equação (11) na forma adimensional fica:

$$\tilde{V} = \frac{V_z}{\bar{V}} = \frac{(3n+1) \left(1 - \tilde{r}^{\frac{1}{n}+1} \right)}{(2n+1)} \quad (13)$$

Normalizando a tensão de cisalhamento:

$$\frac{\tau_{rz}}{1/2 \rho U^2} = \frac{k \left(-\frac{dV_z}{dr} \right)^n}{1/2 \rho U^2} = \frac{16}{Re_n} \tilde{\tau} \quad (14)$$

onde Re_n é o número de Reynolds alternativo, definido por:

$$Re_n = \frac{\rho U^{2-n} D^n}{2^{n-3} (3+1/n) k} \quad (15)$$

é inserido de modo a deixar o fator de atrito com uma forma semelhante ao do fluido newtoniano:

$$f = \frac{\tau_{rz}}{1/2\rho U^2} = \frac{16}{Re_n} \quad (16)$$

Normalizando a viscosidade aparente:

$$\frac{\eta}{k(2U/D)^{n-1}} = \left(-\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}}\right)^{n-1} = \left(\frac{3n+1}{n}\right)^{n-1} \tilde{r}^{(n-1)/n} \quad (17)$$

Solução numérica

Testes de malha

O comprimento do domínio foi definido como o dobro do comprimento de entrada determinado pela correlação de Poole e Ridley (2007):

$$\frac{Z_e}{D} = [(0.246n^2 - 0.675n + 1.03)^{1.6} + (0.0567Re_n)^{1.6}]^{1/1.6} \quad (18)$$

onde Z_e é o comprimento de entrada e Re_n foi definido na equação (15). Para o presente trabalho, foram utilizadas malhas uniformes com elementos progressivamente maiores. Os testes foram realizados com $L = 5m$, $Re_n = 10$, $n = 0,5$, $n = 0,8$ e $n = 1,2$.

Para o cálculo do erro, utilizaremos a norma do erro quadrático:

$$\varepsilon_q = \sqrt{\frac{\sum(q_n - q_a)^2}{\sum q_a^2}} \quad (19)$$

onde n é referente ao resultado numérico e a ao resultado analítico. O processo de escolha de uma malha para as simulações foi feito em uma etapa. Na qual, utilizou-se malhas regulares com elementos gradualmente menores até que se alcançasse certo critério de desvio relativo. A Tabela 1 apresenta os resultados da etapa de escolha da malha.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

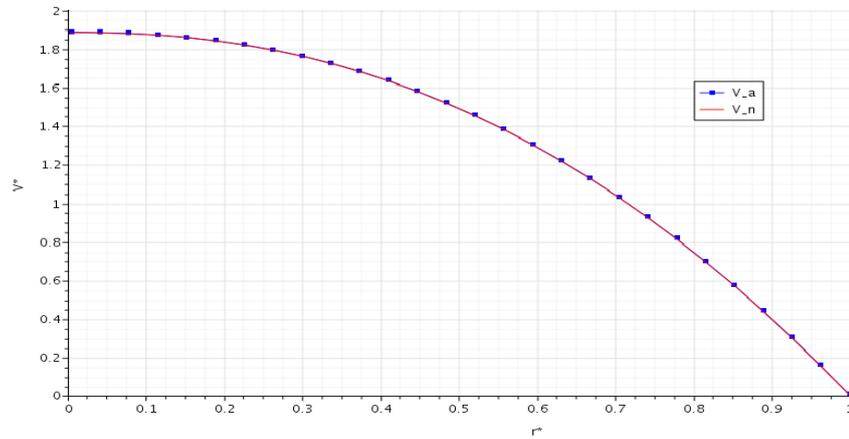
Tabela 1 – Tabela de seleção de malha com melhor custo-benefício para tubo.

	n = 0.5			
	20_50	40_100	80_200	160_400
Erro	3.49E-03	7.79E-04	6.52E-04	4.66E-03
CPU Time (s)	40.84	213.09	1697.80	16763.29
	n = 0.8			
Erro	3.70E-03	9.18E-04	2.54E-04	1.15E-04
CPU Time (s)	39.05	210.61	1833.66	19481.65
	n = 1.2			
Erro	5.44E-03	2.67E-03	2.01E-03	1.82E-03
CPU Time (s)	29.73	196.62	1662.96	204877.67

Fonte: elaborado pelo autor.

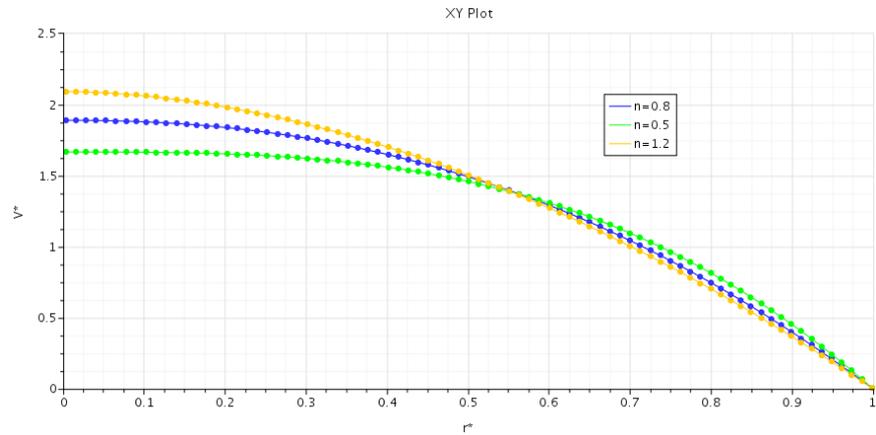
Abaixo estão ilustrados os gráficos comparativos de velocidade numérica e analítica (Figura 1), velocidade para diferentes valores de n (Figura 2), tensão (Figura 3) e fator de atrito (Figura 4).

Figura 1 – Gráfico comparativo entre a velocidade analítica e numérica para $n=0,8$.



Fonte: elaborado pelo autor no STAR-CCM+®.

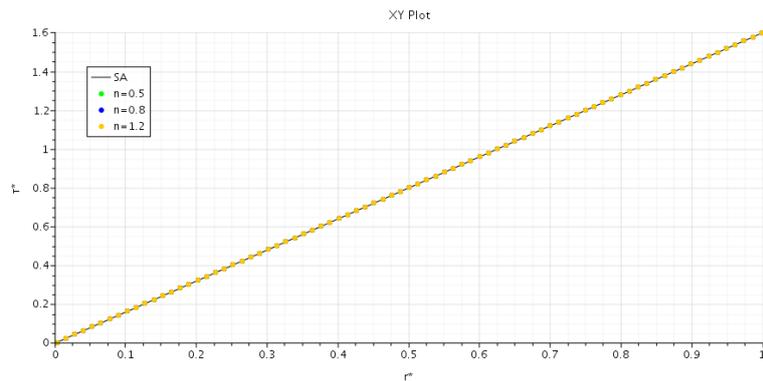
Figura 2 – Perfis analíticos (linhas) e numéricos (círculos) de velocidade para o escoamento desenvolvido do fluido power law.



Fonte: elaborado pelo autor no STAR-CCM+®.

Tensões para os diferentes valores de n :

Figura 3 – Perfis radiais de tensão de cisalhamento em escoamento completamente desenvolvido.



Fonte: elaborado pelo autor no STAR-CCM+[®].

CONCLUSÕES

Foi observada uma boa concordância entre os resultados analíticos e experimentais. De todos os possíveis fatores de ajuste do modelo numérico, a malha computacional é o que tem maior influência na precisão dos resultados. O modelo *power law* existe uma situação problemática na região onde a taxa de cisalhamento é nula. Para estes casos, a viscosidade aparente teórica é infinita. O modelo numérico consegue contornar este problema através da escolha de um valor máximo para a viscosidade. Porém, este valor pode não ser o suficiente para a representação da solução analítica.

Foi possível concluir que, para o caso analisado no presente trabalho, a malha que apresentou a melhor relação custo-benefício foi a de 80 divisões com o algoritmo *coupled flow*.

AGRADECIMENTOS

À fundação Araucária pela bolsa de iniciação científica (PIBITI), ao Prof. Dr. Admilson Teixeira Franco pelas orientações e oportunidade de aprendizado e ao doutorando Alan Lugarini Souza pelo conhecimento compartilhado.

REFERÊNCIAS

Bird, R. B.; Armstrong, R.C.; Hassager, O. **Dynamics of polymeric liquids**. Vol. 1: Fluid mechanics. 1987.

De Waele, A. Viscometry and plastometry. **Oil Color Chem Assoc J**, v. 6, p. 33-88, 1923.

Ostwald, W. Ueber die geschwindigkeitsfunktion der viskosität disperser systeme. i. **Colloid & Polymer Science**, v. 36, n. 2, p. 99-117, 1925.

Poole, R. J.; Ridley, B. S. Development-length requirements for fully developed laminar pipe flow of inelastic non-Newtonian liquids. **Journal of Fluids Engineering**, v. 129, n. 10, p. 1281-1287, 2007.