

Resolução numérica da equação de difusão do calor unidimensional

Numerical resolution of one-dimensional heat diffusion equation

RESUMO

O objetivo do presente trabalho foi obter a solução numérica para a Equação de Difusão do Calor com as seguintes considerações: coordenadas cartesianas, regime não permanente e condições de contorno não homogêneas. O método numérico utilizado foi o de volumes finitos, aplicando uma abordagem totalmente implícita e a linguagem usada foi a Julia. A verificação do código implementado foi realizada por meio da comparação dos resultados da solução numérica com um programa comercial.

PALAVRAS-CHAVE: Método implícito. Volumes finitos. Não homogêneas.

ABSTRACT

The objective of the present paper was to obtain the numerical solution for the Heat Diffusion Equation with the following considerations: cartesian coordinates, non-permanent regime and non-homogeneous boundary conditions. The numerical method used was the finite volumes, applying a totally implicit approach and the language used was Julia. The verification of the implemented code was carried out by comparing the results of the numerical solution with a commercial program.

KEYWORDS: Implicit method. Finite volumes. Non-homogeneous.

Deborah Silva Pires
deborahpires9@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Gisely Luzia Ströher
gisely@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Gylles Ricardo Ströher
gylles@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

Na busca por compreender mais a natureza e seus fenômenos, métodos matemáticos foram construídos. Entre eles estão as Equações Diferenciais Parciais (EDP) que definem uma grande variedade de eventos naturais, tais como: Leis de Newton para o resfriamento dos corpos, Equações de Maxwell, Equações de Navier-Stokes, Equações da Mecânica Quântica de Schrödinger, entre outras. (SODRÉ, 2003).

Por mais que as EDP tenha sido, inicialmente, propostas para as ciências exatas, elas também apresentam grande importância para as ciências humanas, como por exemplo, na análise do crescimento populacional humano. (FERREIRA, 2017).

Segundo ZILL e CULLEN (2009), uma equação que apresenta derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de pelo menos duas variáveis independentes é uma EDP.

Entre os fenômenos naturais que as EDP modelam, os que estão relacionados ao calor podem ser considerados os mais antigos analisados por essa metodologia. Um desses fenômenos analisados é o da Difusão do Calor que apresenta solução simples para condições homogêneas, mas apresenta certa dificuldade para os casos não homogêneos e é nesses casos que a resolução numérica se mostra útil. (SILVA, 2004).

O intuito deste trabalho é abordar resoluções numéricas para a Equação da Difusão do Calor, unidimensional, em coordenadas cartesianas, e em regime não permanente. A metodologia numérica usada foi a de volumes finitos com esquema totalmente implícito e a linguagem computacional usada foi a Julia.

MATERIAL E MÉTODOS

A Eq. 1 é a EDP utilizada no presente trabalho e para propor a resolução numérica indicada por PATANKAR (1980), foram feitas as seguintes considerações: regime não permanente, domínio cartesiano unidimensional, fluxo de calor e temperatura constante como condições de contorno.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

Para a aplicação do modo iterativo à equação, foi necessário supor que a massa específica do fluido, ρ , e sua capacidade calorífica, c , fossem constantes (dentro de uma faixa determinada de T e P para o fenômeno analisado) e foi realizada a transformação da Eq. 1, numa equação de diferenças, obtendo-se, deste modo, a Eq. 2 que será utilizada no código.

$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (2)$$

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} \quad (3)$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \quad (4)$$

$$a_p^0 = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} \quad (5)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_p^0 - S_p \Delta x \quad (6)$$

$$b = S_C \Delta x + a_P^0 T_P^0 \quad (7)$$

Sendo S_C , S_P , k_E , k_W constantes, δx_e e δx_w a distância entre o ponto trabalhado e os pontos posterior e antecessor, respectivamente, Δt a variação do tempo (tempo/pontos), Δx o espaçamento da malha (comprimento/número de pontos) e T_P^0 é a temperatura no instante inicial de cada interação.

As equações apresentadas acima foram utilizadas apenas nos pontos internos da malha, ou seja, os pontos nas fronteiras não podem ter sua temperatura calculada da mesma forma que os internos, visto que eles apresentam influência das fronteiras da malha.

Trabalhou-se com dois tipos de condições de contorno, fluxo de calor constante em uma extremidade ($x=0$) e temperatura constante na outra ($x=\text{comprimento}$). Como a temperatura é constante e conhecida não há necessidade de fazer nenhum cálculo nessa fronteira.

Desta forma, a partir a Eq. 8 e da ideia que fluxo de calor também pode ser escrito como $-k \, dT/dx$ tem-se a Eq. 9, necessária para o cálculo da temperatura na fronteira.

$$q_B + q_I + (S_C + S_P T_B) \Delta x = 0 \quad (8)$$

$$a_B T_B = a_I T_I + b \quad (9)$$

$$a_I = \frac{k_I}{(\delta x)_I} \quad (10)$$

$$a_B = a_I - S_P \Delta x \quad (11)$$

$$b = S_C \Delta x + q_B \quad (12)$$

Sendo k_I uma constante.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Inicialmente foi realizado um estudo de malhas para ser definido qual o tamanho melhor representaria o problema apresentado. Primeiro foi realizado o teste em relação ao intervalo de discretização do tempo e depois o mesmo teste foi feito para o intervalo de discretização do espaço.

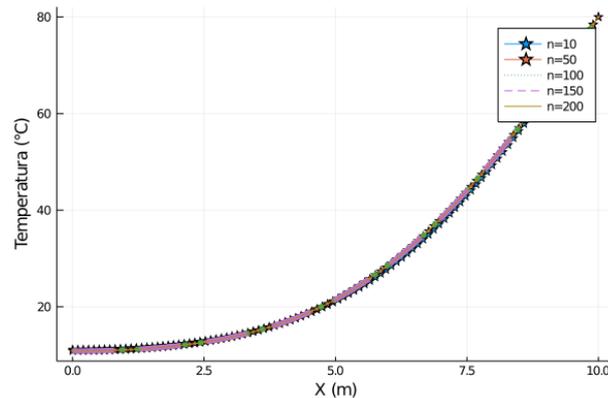
Tabela 1 – Intervalos de tempo

Número de pontos	Δt (s)
10 pontos	20,0
50 pontos	4,00
100 pontos	2,00
150 pontos	1,33
200 pontos	1,00

Fonte: Autoria própria (2020).

Para o teste do tempo o número de pontos da malha em relação ao espaço foi mantido fixo, para não interferir na análise. Desta forma, foram testados cinco intervalos de tempo (Δt), presentes na Tabela 1.

Figura 1 - Intervalos de tempo



Fonte: Autoria própria (2019).

A partir do perfil de temperatura presente na Figura 1 é possível observar que os perfis são os mesmos, independentemente do passo de tempo, Δt , testado. Assim, foi definido $\Delta t=1$ (200 pontos) para os cálculos futuros.

O mesmo método foi aplicado aos pontos da malha relacionados ao espaço, os intervalos espaciais (Δx) testados estão presentes na Tabela 2.

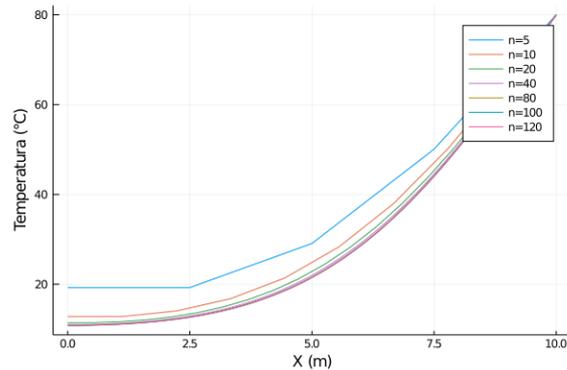
Tabela 2 – Intervalos de espaço

Número de pontos	Δx (m)
5 pontos	2,0
10 pontos	1,0
20 pontos	0,5
40 pontos	0,25
80 pontos	0,125
100 pontos	0,1
120 pontos	0,083

Fonte: Autoria própria (2019).

Como pode ser observado na Figura 2 há algumas variações do perfil de temperatura conforme o Δx varia, contudo é possível observar que a curva não apresenta mudanças significativas para 80, 100 e 120 pontos. Por isso adotou-se $\Delta x=0,1$ (100 pontos).

Figura 2 – Intervalos do espaço



Fonte: Autoria própria (2019).

Os dados iniciais utilizados neste trabalho se encontram na Tabela 3 e a partir deles obtiveram-se os 3 perfis de temperatura, sendo dois deles em relação ao tempo e um em relação a coordenada espacial.

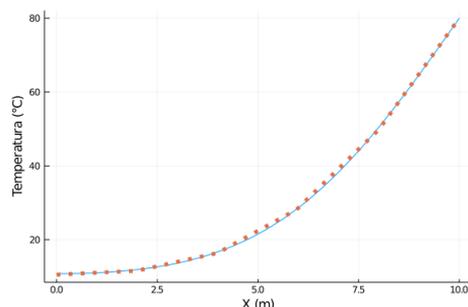
Tabela 3 – Dados iniciais do programa.

Dados	Valor
S_p	0
S_c	0
C	700
P	36
Δx	0,1
Δt	1
Tempo (t)	200 s
k, k_E, k_W, k_i	800
Comprimento (x)	10 cm
Temperatura em $t=0$	10°C
Temperatura da fronteira	80°C
Fluxo de calor da fronteira	0
Número de pontos da malha	100

Fonte: Autoria própria (2020).

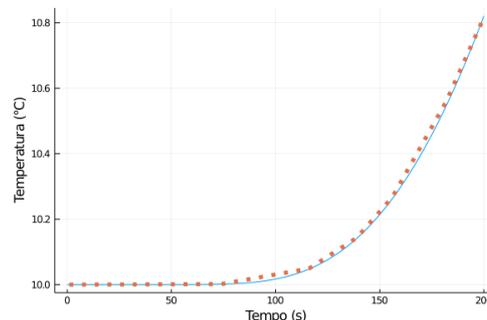
O gráfico presente na Figura 3 representa o perfil de temperatura em relação a coordenada espacial. Ao comparar a solução de um software comercial, representada pelos pontos, à resolução numérica, representada pelo traço contínuo, pode-se observar que os resultados foram coerentes, visto que as temperaturas foram praticamente as mesmas. O mesmo pode ser observado na Figura 4, na qual apresenta-se o histórico de temperatura da posição inicial da malha ($x=0$).

Figura 3- Temperatura em $t=200$



Fonte: Autoria própria (2020).

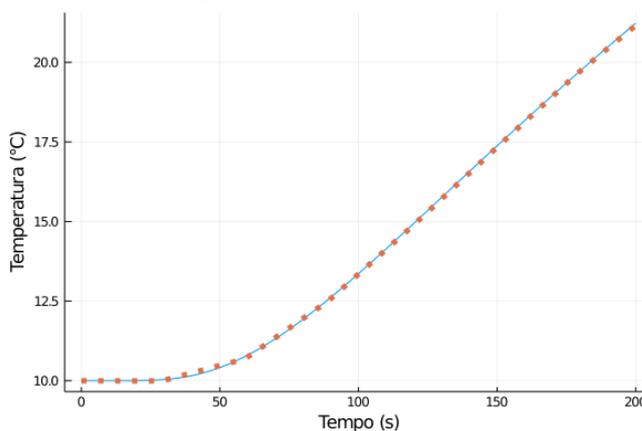
Figura 4 - Temperatura em $x=0$



Fonte: Autoria própria (2020).

Na Figura 5, pode-se observar o histórico da temperatura referente a posição central da malha ($x=L/2$). Ambas as soluções, a do software comercial (linha pontilhada) e a numérica (linha contínua), apresentam resultados extremamente próximos.

Figura 5 – Temperatura em $x=L/2$



Fonte: Autoria própria (2020).

CONCLUSÃO

A equação da difusão do calor unidimensional, em coordenadas cartesianas e em regime não permanente, foi resolvida numericamente por meio do método de volumes finitos, utilizando a abordagem totalmente implícita. Os resultados obtidos da verificação numérica permitem concluir que a solução numérica implementada está de acordo com a solução apresentada pelo software comercial, indicando que o código da solução numérica foi implementado de forma correta.

REFERÊNCIAS

FERREIRA, J. A. **Equações Diferenciais Ordinárias: uma abordagem computacional utilizando o software wxmaxima**. 2017. 45 f. TCC (Graduação) - Curso de (Matemática Aplicada), Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, Rio Grande do Sul, 2017. Disponível em: https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica_aplicada/2017/Jucara_Ferreira.pdf. Acesso em: 04 out. 2020.

PATANKAR, S. **Numerical heat transfer and fluid flow**. New York, USA: McGraw-Hill, 1980. 195p.

SILVA, S. A. **Solução numérica da equação de difusão de calor em geometrias tridimensionais**. 2004. 65 f. Orientador: PhD Paulo Roberto Maciel Lyra. Dissertação (Mestre em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2004. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/5645>. Acesso em: 04 out. 2020.

SODRÉ, U. **Equações diferenciais parciais**. Londrina: [s.n.], 2003. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matesencial/superior/pdfs/edp.pdf>. Acesso em: 04 out. 2020.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Differential Equations with Boundary-Value Problems**. 7. ed. Belmont, USA: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2009.