

O operador GPX aplicado ao problema da árvore de Steiner em grafos

GPX operator applied to Steiner tree problem in graphs

RESUMO

Bruna Almeida Osti
brunaosti@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, PR, Brasil

Danilo Sipoli Sanches
danilosanches@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, PR, Brasil

O objetivo geral deste trabalho é propor um método de adaptação do operador de cruzamento de partição generalizado (GPX) para aplicação no problema da árvore de Steiner em grafos (STPG). Em geral, o operador de cruzamento de partição generalizado tem como princípio aproveitar as melhores partes de duas soluções, garantindo sempre que a melhor solução gerada seja sempre melhor ou que mantenha o custo das soluções iniciais, sem aumentar a complexidade computacional do algoritmo. De acordo com o resultado dos experimentos o modelo se mostrou funcional, superando métodos já consolidados. Por meio de futuros aprimoramentos, o método tem um grande potencial, assim como há a possibilidade de reutilizá-lo para outros problemas de otimização combinatória em grafos, com outros tipos de restrições apenas alterando algumas estruturas do algoritmo.

PALAVRAS-CHAVE: Algoritmos genéticos. Árvores (Teoria dos grafos). Otimização combinatória.

ABSTRACT

The general objective of this work is to propose a method of adaptation of the n this paper a method is proposed to apply the generalized partition crossover operator (GPX) to the Steiner tree problem in graphs (STPG). In general, the generalized partition crossover operator has the basic principle to keep the best parts of two solutions, always ensuring that the best solution generated is always better or that it keeps the cost of the initial solutions, without increasing the algorithm computational complexity. According to the results of the experiments, the model proved to be functional, surpassing already consolidated methods. Through future improvements, the method seems to have great potential, as well as the possibility of reuse for other combinatorial optimization problems in graphs, with other types of restrictions, by just changing some algorithm structures.

KEYWORDS: Genetic algorithms. Trees (Graph theory). Combinatorial optimization.

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

A otimização combinatória é constantemente utilizada para modelar e resolver grandes problemas de logística, tendo como exemplo um dos problemas mais conhecidos e estudados nessa área: o problema da árvore de Steiner, foco deste trabalho. Apesar da modelagem do problema ser de complexidade NP-Difícil, o qual não consegue ser resolvido em tempo polinomial, a sua estrutura é de ampla eficácia em modelagens de projetos de circuitos elétricos, redes de comunicação e de transporte (CHENG, 2002).

Segundo Gilbert e Pollak (1968), o problema da árvore de Steiner tem como objetivo encontrar um caminho mínimo que interconecte “n” pontos fixos dados. Para atingir tal objetivo é permitida a adição de pontos auxiliares que minimizem o comprimento do grafo final, que é a soma dos comprimentos de todas as arestas conectadas, estes pontos auxiliares são chamados de pontos de Steiner.

Devido à complexidade do problema surgiram algumas outras variações que buscam limitar o problema em função da aplicação, tais como: o problema da árvore de Steiner em grafos (STPG, *Steiner tree problem in graphs*) (FOULDS, 1983), o problema da árvore de Steiner retilíneo (RSTP, *retilinear Steiner tree problem*) (HANAN, 1966), e o problema da árvore de Steiner euclidiano (ESTP, *euclidean Steiner tree problem*) (HWANG, 1976). Desta forma, devido à grande variedade de aplicações possíveis, este trabalho terá como base o problema da árvore de Steiner em grafos (STPG).

Com o intuito de encontrar soluções para o STPG será utilizado um algoritmo genético desenvolvido de acordo com as restrições e peculiaridades do problema. Também será utilizado o operador de cruzamento GPX para buscar uma possível melhoria na solução, sendo este operador baseado no *partition crossover* (PX), definido por Whitley (WHITLEY, 2009) para caminhar nos ótimos locais do TSP (Problema do Caixeiro-Viajante).

Por fim, esse trabalho tem como objetivo entender os conceitos e passos utilizados pelo GPX; investigar as informações e conceitos a respeito do STPG; e além disso, investigar e definir ideias para a representação das soluções, bem como abordagens de resolução.

MATERIAL E MÉTODOS

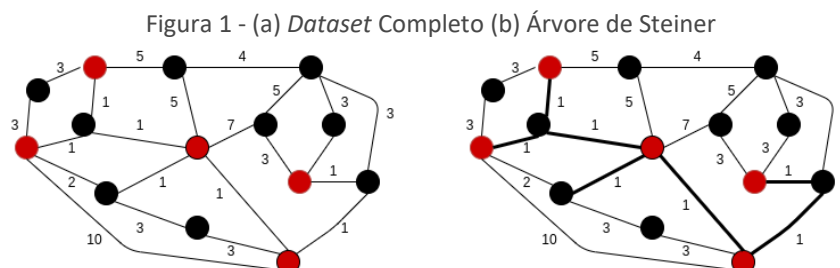
FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considerando um grafo não direcionado conexo $G = (V, A)$ e um subconjunto não vazio de N (par de vértices) de V . O problema de Steiner consiste em encontrar um subgrafo (conexo) $G' = (V', A')$ de G que tenha um caminho em G' entre cada par de vértices N ; e que o comprimento (custo da solução) $L(G') = \sum_{e \in A'} f(e)$ seja mínimo (CIESLIK, 1998). A Equação 1 demonstra a definição do problema.

$$L(T(N \cup V_0)) = \min\{L(T(N \cup V')) : V' \subseteq V \setminus N\} \quad (1)$$

No qual, $T(N \cup V_0) = STPG$ para N em G .

A Figura 1 demonstra primeiramente a árvore completa com todos os pontos contidos no *dataset*, posteriormente a árvore de Steiner. Os vértices terminais são chamados de pontos obrigatórios e todos os outros vértices do conjunto são opcionais, ou seja, os vértices opcionais que entram na solução são chamados de pontos de Steiner, portanto, a solução final abrange apenas um subconjunto que é denominada árvore de Steiner (HWANG, 1992).

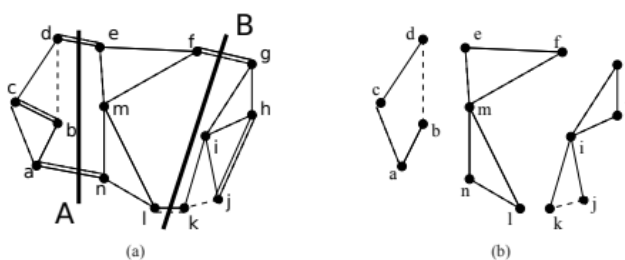


Fonte: Autoria Própria (2020)

OPERADOR DE CRUZAMENTO DE PARTIÇÕES (GPX)

O operador GPX utiliza a união de duas soluções para encontrar um tipo específico de partições (estruturas) no grafo construído como descrito na Figura 2, em seguida é capaz de usá-las em uma única combinação sem aumentar o custo de processamento e melhorando ou mantendo o custo das soluções. Além disso, uma característica intrínseca do operador é a habilidade de encontrar ótimos locais a partir de outros ótimos locais (WHITLEY, 2009).

Figura 2 - Partições formadas pelo GPX - (a) Retirada de arestas em comuns, (b) Formação das partições

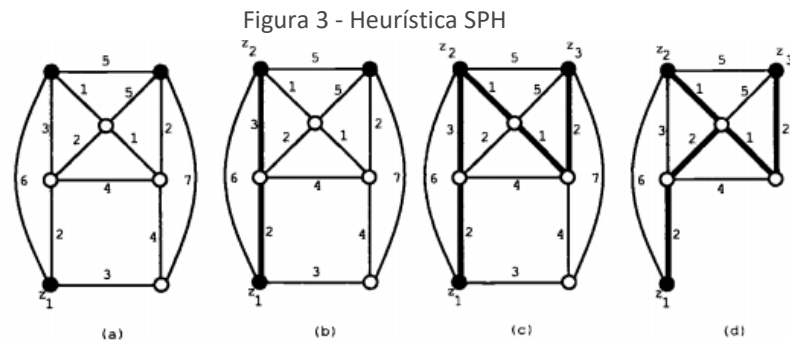


Fonte: (WHITLEY, 2009)

HEURÍSTICAS AUXILIARES

Nessa seção falaremos sobre heurísticas auxiliares utilizadas para a construção de árvores conexas que serão utilizadas para iniciar a solução em algumas das abordagens, no qual foram utilizadas as heurísticas SPH (*Shortest path heuristic*) e SPOH (*Shortest path heuristic with origin*).

- a) **SPH** - Na heurística SPH (*Shortest path heuristic*) primeiramente é escolhido um vértice terminal arbitrário para dar início a solução, cada passo construído e calculado através do algoritmo de Dijkstra e o caminho contendo o vértice inicial é o caminho mínimo como descrito na Figura 3. Após a construção completa da árvore é opcional a aplicação do algoritmo de Prim para remover possíveis ciclos (HWANG, 1992).



Fonte: (HWANG, 1992)

- b) **SPOH** - A heurística SPOH (*Shortest path heuristic with origin*) consiste em encontrar o menor caminho de um vértice terminal arbitrário para todos os outros terminais de forma iterativa. Geralmente tende a ter resultados inferiores ao SPH (HWANG, 1992).

ABORDAGENS UTILIZADAS

Foram utilizados diversos tipos de abordagens com o intuito de verificar a eficácia de cada uma. Todas as abordagens envolvem o uso de algoritmos genéticos, entretanto suas estruturas são diferentes. No Quadro 1 estão sumarizadas as abordagens e as suas heurísticas correspondentes, que foram implementadas utilizando a linguagem Python 3.

Quadro 1 - Abordagens implementadas

Abordagens	Estrutura de Algoritmo Genético utilizada	População Inicial
AG	Cruzamento de um ponto, mutação de um ponto, seleção roleta	Aleatória
GPX	Cruzamento GPX, seleção roleta	Grafos factíveis usando heurísticas auxiliares SPH e SPOH
Híbrido	Cruzamento GPX, cruzamento de um ponto, mutação de um ponto, seleção roleta	Parte aleatória + parte factível utilizando as heurísticas auxiliares SPH e SPOH

Fonte: Autoria Própria (2020)

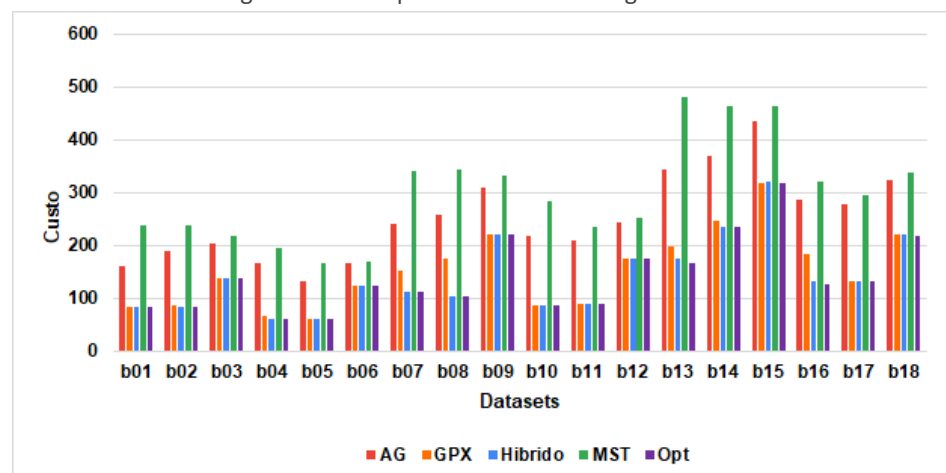
RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com a realização dos testes foi possível obter diversos dados sobre o comportamento e desempenho dos métodos STPG. A seguir serão apresentados gráficos e discussões sobre os testes. Nestes, cada configuração foi executada dez vezes e foi calculada a média e o desvio padrão da amostra em análise. É importante observar que as bases de dados escolhidas estão contidas no conjunto B dos *datasets* OR-LIBRARY (OR-LIBRARY, 1990).

ANÁLISE GERAL

Uma visão geral dos resultados é dada pelas figuras Figura 4 e Figura 5. Para cada abordagem, Figura 4 apresenta o custo obtido (peso associado ao comprimento das arestas escolhidas), enquanto a Figura 5 mostra o tempo gasto.

Figura 4 - Custo por *dataset* e abordagem



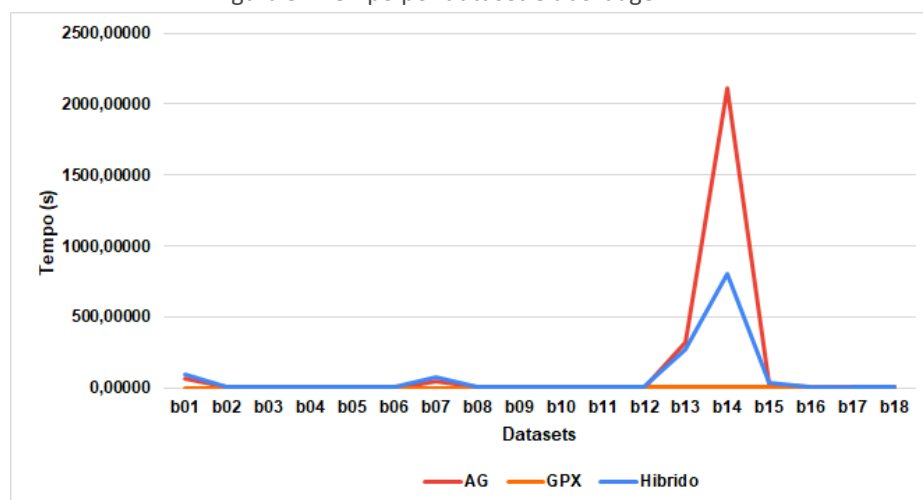
Fonte: Autoria Própria (2020)

De modo geral, em 7 dos 18 *datasets* as abordagens GPX e Híbrido tiveram um desempenho equivalentemente bons, ambos encontraram os ótimos globais do *dataset* em tempo hábil. Em 4 dos 18 *datasets*, a abordagem GPX teve um custo menor que as demais abordagens. De mesmo modo, em 7 dos 18 *datasets* a abordagem Híbrida se destacou das demais abordagens pelo menor custo. Entretanto, nos *datasets* b09 e b17 a abordagem Híbrida encontrou certa dificuldade em convergir a população completa, portanto, aproximadamente 10% dos indivíduos na população final não eram factíveis.

A abordagem AG não conseguiu se destacar em nenhum dos *datasets*, isto acontece pois o algoritmo genético acaba ficando preso em ótimos locais, enquanto as outras abordagens utilizam sementes na sua população inicial que garantem a convergência da solução para o ótimo global.

Apesar do AG não ter se destacado em nenhum dos *datasets*, pode-se verificar que em todos os casos a população convergiu completamente para a solução encontrada mantendo a população conexa. Além disso, sempre se manteve abaixo da árvore mínima do grafo completo (MST).

Figura 5 - Tempo por *dataset* e abordagem



Fonte: Autoria Própria (2020)

Na Figura 5, em termos de tempo, observa-se que a abordagem Híbrido em 45% dos casos tem o seu tempo de processamento maior que as outras abordagens, salvo pelo *dataset* B14 no qual é perceptível que o algoritmo genético acabou caindo nos piores casos. Entretanto, é possível verificar que a abordagem Híbrida apresenta precisão de 63,88% com média de apenas 0,26% de desvios dos custos das soluções, obtendo o ótimo global em 56% das vezes e em 44% das vezes obtendo ótimos locais bem próximos ao objetivo global.

Contudo, a melhor abordagem acaba sendo o GPX pois além de ter o tempo menor em 89% dos casos quando comparado ao Híbrido, apresenta precisão de 41,10% com média de apenas 9,12% nos desvios dos custos das soluções, obtendo o ótimo global em 45% das vezes e em 55% das vezes obtendo ótimos locais bem próximos ao objetivo global e que realizaram a convergência da população completa.

CONCLUSÃO

A princípio buscava-se comparar a eficácia de métodos para a resolução do problema da árvore de Steiner, posteriormente o enfoque do trabalho passou a ser a adaptação do operador GPX devido a sua versatilidade e potencialidade de desenvolvimento.

As etapas de desenvolvimento do trabalho foram desde a modelagem, representação e leitura das soluções; a escolha do método de cálculo da aptidão de cada indivíduo da população mais adequada; o estudo de métodos possíveis para a implementação do STPG, até o desenvolvimento de uma adaptação do operador de cruzamento GPX.

Embora diversos problemas tenham sido enfrentados durante o desenvolvimento, como encontrar meios e abordagens que pudessem garantir que as soluções geradas fossem factíveis (conexas), além da necessidade de utilização de dois tipos de representações das soluções, o objetivo geral do trabalho foi atingido.

Os dados e as análises mostraram a melhoria que o GPX traz para as soluções do STPG. Além disso, mostra-se que o modelo é funcional e que por meio do aprofundamento das pesquisas o algoritmo poderá se tornar competitivo em comparação a abordagens já consolidadas. Alguns pontos podem ser melhorados, como por exemplo a necessidade de as entradas do operador serem árvores já factíveis, dependendo então de outros métodos para a geração das árvores.

Nesta pesquisa, todas as abordagens se mostraram funcionais e a escolha do uso de cada uma depende da aplicação. Para o conjunto de datasets considerado, na maioria dos casos o GPX obteve resultados gerais superiores aos demais em quesitos de tempo, qualidade da solução e alcance dos ótimos globais de cada *dataset*. Desta forma, o operador consegue desenvolver e otimizar as soluções com melhor aproveitamento, além de não gerar soluções infactíveis.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à UTFPR que disponibilizou a utilização da infraestrutura acadêmica para o desenvolvimento deste trabalho. Agradecemos ao docente Renato Tinós (USP - RP) que participou do desenvolvimento e testes realizados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- BEASLEY, J. E. OR-LIBRARY. 1990. Disponível em: <http://people.brunel.ac.uk/~mastijb/jeb/info.html>. Acesso em: 03-Out-2020.
- CIESLIK, D. **Steiner Minimal Trees**. Dordrecht Boston: Kluwer Academic, 1998. ISBN: 0792349830.
- CHENG, X. Z.; DU, D.-Z. (Ed.). **Steiner Trees in Industry**. Springer US, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0255-1>. Acesso em: 03-Out-2020.
- FOULDS, L. R.; RAYWARD-SMITH, V. J. **Steiner Problems in Graphs: Algorithms and Applications**. **Engineering Optimization**, Informa UK Limited, v. 7, n. 1, p. 7–16, jan. 1983. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/03052158308960625>. Acesso em: 03-Out-2020.
- GILBERT, E. N.; POLLAK, H. O. **Steiner Minimal Trees**. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 16, n. 1, p. 1–29,

1968. ISSN: 00361399. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2099400>.
Acesso em: 03-Out-2020.

HANAN, M. **On Steiner's Problem with Rectilinear Distance**. SIAM Journal on Applied Mathematics, Society for Industrial & Applied Mathematics, v. 14, n. 2, p. 255–265, mar. 1966. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0114025>. Acesso em: 03-Out-2020.

HWANG, F. K. **On Steiner Minimal Trees with Rectilinear Distance**. SIAM Journal on Applied Mathematics, Society for Industrial & Applied Mathematics, v. 30, n. 1, p. 104–114, jan. 1976. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0130013>. Acesso em: 03-Out-2020.

HWANG, F. K. **The Steiner Tree Problem**. Amsterdam New York: North-Holland, 1992. ISBN: 9780080867939.

WHITLEY, D.; HAINS, D.; HOWE, A. **Tunneling Between Optima**. In: Proceedings of the 11th Annual conference on Genetic and evolutionary computation - GECCO 09. ACM Press, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/1569901.1570026>. Acesso em: 03-Out-2020.