

Programação matemática e mercado financeiro

Mathematical programming and financial market

RESUMO

Alexia Vitoria da Silva
alexia.vitoria@outlook.com
Universidade Tecnológica Federal
do Paraná, Cornélio Procopio,
Paraná, Brasil

Daniele Costa Silva
danielesilva@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal
do Paraná, Cornélio Procopio,
Paraná, Brasil

Impulsionadas pela atual instabilidade econômica mundial e aumento da procura por investimentos em ativos, as autoras deste trabalho estudaram A Teoria Moderna do Portfólio, desenvolvida e publicada por Harry Markowitz, em 1952, que explora a ideia da diversificação matemática entre os ativos escolhidos para compor uma carteira (ou portfólio) de investimentos. Através da Programação Matemática e do software Excel, aplicaram a Teoria de Markowitz na carteira teórica do Ibovespa para o primeiro quadrimestre de 2020. Nos experimentos computacionais, analisaram quatro modelos distintos envolvendo o risco e o retorno esperado da carteira (a maximização da razão entre retorno e risco, maximização do retorno, minimização do risco e a maximização da diferença entre retorno e risco) e aplicaram as mesmas fórmulas para os percentuais de participação de cada ativo determinado pelo Ibovespa. Como resultado, um dos modelos falhou, pelo erro de arredondamento do Excel, e os demais apresentaram retornos maiores que a carteira do Ibovespa, apesar de um deles ter um alto risco em relação aos outros. Conclui-se que o período de um quadrimestre é pouco para dar segurança aos investidores, mas que a metodologia de Markowitz foi realmente revolucionária para o mercado de investimentos.

PALAVRAS-CHAVE: Investimentos. Ativos. Risco. Programação matemática.

ABSTRACT

Driven by the current global economic instability and increased demand for investment in assets, the authors of this paper studied The Modern Theory of the Portfolio, developed and published by Harry Markowitz, in 1952, which explores the idea of mathematical diversification among the assets chosen to compose an investment portfolio. Through Mathematical Programming and Excel software, they applied the Markowitz Theory in the theoretical portfolio of Ibovespa for the first four months of 2020. In the computational experiments, they analyzed four different models involving the risk and the expected return of the portfolio (maximizing the ratio between return and risk, maximizing return, minimizing risk and maximizing the difference between return and risk) and applied the same formulas for the participation percentages of each asset determined by Ibovespa. As a result, one of the models failed, due to Excel's rounding error, and the others showed higher returns than the Ibovespa portfolio, although one of them has a high risk in relation to the others. It is concluded that the period of a four-month period is not enough to provide investors with security, but that the Markowitz methodology was really revolutionary for the investment market.

KEYWORDS: Investment. Risk. Assets. Mathematical Programming.

Recebido: 04 set. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

A instabilidade econômica, tanto brasileira quanto mundial, tem levado pessoas a buscarem diferentes fontes de renda, e as carteiras de ativos vêm ganhando destaque a cada dia. No entanto, com um ambiente cada vez mais incerto, é essencial que os investidores analisem criteriosamente suas escolhas, e a Programação Matemática pode ser um suporte nesse processo.

Uma carteira de ativos pode ser composta por investimentos de renda fixa e de renda variável. O primeiro, como o nome sugere, possui rendimento fixo, com rentabilidade pré-estabelecida, como por exemplo a Caderneta de Poupança (de risco quase nulo, liquidez imediata e baixos retornos). O segundo apresenta renda variável, ou seja, não possui rentabilidade pré-estabelecida, podendo variar por “n” fatores, geralmente resultando em maiores riscos e também maiores retornos, como por exemplo as ações nas bolsas de valores.

A escolha dos ativos que comporão a carteira é definida pelo perfil do investidor, que pode ser: conservador (avesso ao risco, que valoriza a segurança dos investimentos mesmo que o retorno seja baixo), moderado (disposto a correr algum risco, desde que o lucro compense), ou arrojado (busca o maior rendimento possível, independente dos riscos).

Independentemente do tipo de renda dos ativos ou do perfil do investidor, é importante que haja uma análise que auxilie a tomada de decisão, como por exemplo, um modelo de otimização. Neste trabalho, são apresentados modelos de Programação Linear e Não Linear tomando como base a Teoria de Markowitz (ou Teoria Moderna do Portfólio), a qual consiste em uma matemática de diversificação, propondo que os investidores não mais selecionassem títulos individuais, mas montassem carteiras (ou portfólios) de investimento com títulos que “não se movam juntos”, ou seja, que não estão sujeitos somente às mesmas variações como desempenho da empresa, do mercado que está inserida e da economia.

Estes modelos foram utilizados, através de experimentos computacionais, para compor uma carteira otimizada a partir de ativos que participaram do Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa) no primeiro quadrimestre de 2020.

O presente trabalho é composto por mais 3 seções, a saber, Metodologia, Resultados e discussões e Conclusão. Em Metodologia a teoria que embasa o trabalho é brevemente apresentada, assim como, o processo de experimentação computacional. Resultados e discussões traz a exibição e discussão acerca dos resultados obtidos por meio dos experimentos e por fim, na Conclusão são apresentadas as considerações finais.

METODOLOGIA

Nesta seção são brevemente apresentados os conceitos matemáticos que alicerçam o trabalho, os pontos utilizados da Teoria de Markowitz, os modelos de Programação Matemática e a descrição dos experimentos computacionais.

Programação matemática. A Pesquisa Operacional (PO) visa o desenvolvimento e à aplicação de métodos científicos para a resolução de problemas e tomadas de decisão (GOLDBARG, 2005 e ARENALES, 2007). O estudo de PO pode ser dividido em várias subáreas e a Programação Matemática é uma delas. Em geral, os problemas de Programação Matemática envolvem minimização (ou maximização) de uma função objetivo sujeito a um conjunto de restrições, conforme exemplificado na equação (1):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar (ou Maximizar)} \quad f(x) \\ &\text{Sujeito a} \quad g_k(x) \leq b_k, k = 1, 2, \dots, n; \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Onde $[sinal]$ pode ser $\leq$, $\geq$ ou $=$.

Quando a função objetivo ($f(x)$) e as restrições ($g_k(x)$) são lineares trata-se de um problema de Programação Linear. Se houver qualquer aspecto que prejudique a linearidade, seja nas variáveis ou em uma das funções, o problema exposto na equação (1) é considerado de Programação Não Linear.

Conceitos estatísticos. Para uma melhor compreensão da Teoria de Markowitz é necessária a definição de alguns conceitos estatísticos. Uma análise mais detalhada da teoria que fundamenta os conceitos apresentados nesta subseção pode ser vista em Bussab (2010).

- a) Variável aleatória discreta: seja Ω um espaço amostral associado a um determinado experimento. Uma função X , que associa cada elemento $\omega \in \Omega$ a um número real, $X(\omega)$, é denominada variável aleatória. Se o número de valores possíveis de X for enumerável, X é uma variável aleatória discreta;
- b) Valor esperado (E): é a tendência central (média) de uma variável aleatória. Seja X uma variável aleatória discreta, $x_1, x_2, \dots$, os valores que X pode assumir e $p(x_i)$ a probabilidade de X assumir o valor x_i . Então, E é dado por $E(X) = x_1p(x_1) + x_2p(x_2) + \dots$;
- c) Variância (Var): é um desvio em relação à média (valor esperado) de uma variável aleatória X , dado por $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$;
- d) Covariância (σ): a covariância de duas variáveis aleatórias X e Y é uma medida de variabilidade conjunta. Se as variáveis possuem covariância positiva tendem a ter um comportamento semelhante. Se for negativa as variáveis tendem a ter um comportamento oposto. A mesma é dada por $\sigma_{xy} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$.

Teoria de Markowitz. Publicado em 1952, pelo americano Harry Markowitz, o estudo “*Portfolio Selection*” revolucionou a forma como os investimentos eram feitos, o que rendeu a seu autor o Prêmio Nobel de Economia em 1990. Neste estudo, ele verificou que as decisões de seleção de ativos não deveriam estar baseadas apenas nos retornos esperados, mas também nos riscos envolvidos tanto individualmente quanto em conjunto, baseado nas correlações entre os ativos

(DAMODAN, 1996), visto que “o risco de um ativo mantido fora de uma carteira é diferente de seu risco quando incluído na carteira” (ASSAF NETO, 2010). E desse modo, formar uma carteira de ativos eficiente, que é aquela que apresenta o maior retorno esperado para determinado nível de risco ou o menor nível de risco para determinado retorno desejado (MARKOWITZ, 1952).

Para tanto, Markowitz utiliza-se dos conceitos estatísticos supracitados para o cálculo do retorno esperado da carteira (R) e o risco não sistemático (V) da mesma, isto é, a possibilidade da carteira não atingir o retorno esperado que pode ser minimizada pela diversificação. Como isso tem-se:

$$R = \sum_{i=1}^n W_i E_i \quad (2)$$

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j \sigma_{ij} \quad (3)$$

Onde: W_i é a participação percentual de cada ativo i na carteira;
 E_i é o retorno esperado do ativo i ;
 σ_{ij} é a covariância entre o par de ativos i e j se i diferente de j e a variância se i igual a j .

Modelos matemáticos. A partir das definições de Markowitz para o retorno e o risco da carteira é possível otimizá-la utilizando-se da Programação Matemática. Neste trabalho optou-se pelas seguintes situações:

- Modelo 1: Maximizar a relação $\frac{R}{V}$, uma vez que essa assumirá valores maiores à medida que os valores de R aumentam e de V diminuem;
- Modelo 2: Desprezar o risco da carteira e maximizar seu retorno R ;
- Modelo 3: Desprezar o retorno R e minimizar o risco V ;
- Modelo 4: Maximizar a relação $R - V$ em busca de um maior retorno R e um menor risco V para a carteira.

Para todas essas situações considera-se que as variáveis, isto é, os valores W_i , são maiores ou iguais a zero e que a somatória dos mesmos deve ser igual a 1 assegurando que 100% do capital será investido.

Note que os Modelos 1, 3 e 4 tratam-se de modelos de Programação Não Linear e o Modelo 2 de Programação Linear. Nesse primeiro momento não será feita uma discussão acerca de métodos relacionados a essas técnicas de programação matemática e sim, um enfoque em uma resolução com suporte computacional que utiliza-se desses métodos.

Experimentos computacionais. Como dito anteriormente, os modelos descritos na subseção anterior foram utilizados para compor uma carteira de investimentos a partir dos ativos que compunham o índice Ibovespa no primeiro quadrimestre de 2020. Este índice é o indicador médio das cotações de mercado das ações da Bolsa de Valores de São Paulo. A cada quadrimestre, nos períodos de janeiro a abril, maio a agosto e setembro a dezembro, a carteira teórica do Ibovespa é reavaliada, de forma que apenas ativos que representam 80% das

negociações e do volume financeiro e de 70% dos negócios de todas as ações comercializadas na bolsa de valores compoñham a carteira.

No período escolhido (01/01/2020 a 30/04/2020) 73 ativos¹ faziam parte do índice, no entanto, foram utilizados 72 desses, pois não foi possível coletar dados do PCAR4 (ativo do grupo Pão de Açúcar) no período avaliado. Assim, através do site de cotações InfoMoney², foi coletada a variação diária dos retornos de cada ativo, e com auxílio da função MÉDIA do Excel, calculou-se a média dessas variações para cada ação, média esta utilizada como o valor esperado do ativo $i(E_i)$. Para a maioria dos ativos, as médias de retornos foram negativas. O que provavelmente está relacionado aos impactos da pandemia de COVID-19 no setor econômico e financeiro. A partir desses dados (variações diárias e médias dos ativos), foi possível o cálculo da covariância entre cada par de ativos utilizando a função COVARIANÇA.P do Excel, as quais foram armazenadas em uma matriz.

Desse modo, iniciou-se os experimentos computacionais, primeiramente com a estruturação necessária para a otimização da carteira com o suporte da ferramenta Solver³ do Excel, a qual envolve determinação das células das variáveis W_i , do retorno esperado da carteira (equação 2) com o uso da função SOMARPRODUTO(médias das variações dos ativos; células das variáveis), do risco (equação 3) com as funções combinadas SOMARPRODUTO(MATRIZ.MULT(células das variáveis; matriz de covariâncias); células das variáveis), da função objetivo (calculada de 4 maneiras diferentes de acordo com os modelos) e da restrição: soma das células variáveis igualada a 1. E posteriormente, a aplicação da ferramenta Solver para cada modelo selecionando o método de resolução mais adequado.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após a aplicação da ferramenta Solver do Excel, para cada um dos modelos exibidos na seção Metodologia, obteve-se os percentuais de participação de cada ativo na carteira.

O resultado dos experimentos computacionais foi o seguinte:

- a) Modelo 1: falhou, já que nenhum ativo é escolhido para a composição da carteira;
- b) Modelo 2: a carteira é composta apenas pelo ativo MRFG3;
- c) Modelo 3: carteira composta pelos ativos BBSE3, 2,056%, RADL3, 12,8683%, SUZB3, 5,5561%, TAEE11, 72,3432%, e VIVT4, 7,1768%;
- d) Modelo 4: carteira composta pelos ativos BBSE3, 1,1899%, RADL3, 13,8046%, SUZB3, 5,6813%, TAEE11, 73,3525%, e VIVT4, 5,9717%.

¹ Disponível em http://www.b3.com.br/pt_br/noticias/nova-carreira-do-ibovespa-e-demaix-indices.htm

² <https://www.infomoney.com.br/cotacoes/>

³ <https://support.microsoft.com/pt-br/office/definir-e-resolver-um-problema-usando-o-solver-5d1a388f-079d-43ac-a7eb-f63e45925040>

Na tabela 1 são apresentados os valores do retorno esperado (equação 2) e risco (equação 3) de cada uma das carteiras, e para as carteiras provenientes dos modelos também consta o valor da função objetivo.

Tabela 1 – Retorno e risco das carteiras

Carteiras					
	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Ibovespa
Retorno	0	0,5568	-0,1170	-0,1135	-0,3167
Risco	0	47,456	4,4770	4,47887	20,3493
F. Objetivo	#DIV/0!	0,01173	-0,0261	-4,5922	

Fonte: autoria própria

Note que o Modelo 1 se mostrou inconclusivo em decorrência de problemas de arredondamento, o que fez com que a função objetivo resultasse em uma divisão por zero, causando a indeterminação representada por “#DIV/0!”. As carteiras oriundas dos demais modelos apresentaram retornos maiores do que a proposta pelo Ibovespa e no caso dos Modelos 3 e 4 o risco é também menor, mostrando-se, portanto, melhores opções em relação ao Ibovespa. A carteira proveniente do Modelo 2 é a que possui o maior retorno e também o maior risco, consequência da não diversificação, o que é coerente com a proposição do modelo de maximizar o retorno da carteira, ignorando o risco, sendo também uma melhor opção que o Ibovespa.

CONCLUSÕES

O curto período de duração da Iniciação Científica que resultou neste relatório foi dedicado a um trabalho introdutório, no qual testamos um dos principais métodos de otimização de carteiras de investimentos: A Teoria de Markowitz.

Como apresentado na sessão Resultados e Discussões, a otimização com base na teoria de Markowitz se mostrou mais eficiente que a proposição do Ibovespa, índice de referência no mercado financeiro brasileiro, dando-nos maiores retornos em todos os casos, com riscos menores, com exceção do Modelo 2.

No entanto, fica evidente que o contexto desse trabalho se aplicaria apenas ao perfil arrojado de investidor, não pelas metodologias aplicadas, mas sim pelo curto período de análise: um quadrimestre. Ficando como sugestão para futuros estudos na área a análise de períodos maiores de variações de ativos.

REFERÊNCIAS

- ARENALES, M. et al. **Pesquisa Operacional: para cursos de engenharia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- ASSAF NETO, A. **Mercado financeiro**. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- BUSSAB, W.O., MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. 6. ed. Saraiva, 2010.
- DAMODAN, A. **Applied Corporate Finance: A User's Manual**. New York: John Wiley & Sons, 1996.

GOLDBARG , M. C.; Luna, H. P. **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

MARKOWITZ, H. **Portfolio selection**. The Journal of Finance, 1952.