

Modelagem Paramétrica e Controle de um Sistema Giroscópio

Parametric Modelling and Control of a Gyroscope System

RESUMO

Gabriel Augusto Reis Silva
gabriel.160999@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, Paraná, Brasil

Cristiano Marcos Agulhari
agulhari@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, Paraná, Brasil

Sistemas baseados em giroscópios estão presentes principalmente no campo de navegação marítima e aérea, além do uso em voos espaciais, mas não ficam restritos à apenas estes. Devido à sua importância e ampla utilização, o principal objetivo de estudo é o desenvolvimento de técnicas de análise e controle dos mesmos, que garantem o uso efetivo e seguro do sistema. Devido à sua dinâmica altamente não-linear, é necessário utilizar ferramentas mais complexas, como o método direto de Lyapunov e os sistemas lineares dependentes de parâmetros. Além da garantia de estabilização e controle de tais sistemas, também é necessário que, quando modelados, sejam próximos ao sistema físico, para que todo resultado obtido seja aplicável na prática.

PALAVRAS-CHAVE: Controle. Robusto. Paramétrico. Giroscópio.

ABSTRACT

Gyroscope based systems are mainly present in sea and air navigation fields, in addition to use in space flights, but are not restricted to just these. Due to its importance and wide use, the main purpose of the study is to develop analysis and control techniques, which guarantee the effective and safe use of the system. Due to its highly non-linear dynamics, it is necessary to use most complex tools, such as Lyapunov's direct method and linear Parameter-Varying control. In addition to ensuring the stabilization and control of such systems, it is also necessary that, when modeled, they are close to the physical system, so that all results obtained are applicable in practice.

KEYWORDS: Control. Robust. Parametric. Gyroscope.

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autorial: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

A análise, modelagem e desenvolvimento de controle para sistemas eletromecânicos, digitais, eletrônicos, e tantos outros, são essenciais para a sociedade tecnológica atual; tais sistemas estão presentes em todos os aspectos do nosso cotidiano, desde o controle de temperatura de uma geladeira ao voo de um avião (COOK, 2007). É de suma importância garantir a estabilidade e controlabilidade de qualquer sistema, para que tais equipamentos funcionem corretamente e forneçam o conforto e segurança desejável.

Nos problemas de controle, a garantia de controlabilidade e estabilidade de sistemas baseados em giroscópios torna possível, por exemplo, o Sistema de Navegação Inercial, o qual encontra o norte magnético a partir de giroscópios e acelerômetros (KING, 1998).

O sistema utilizado em neste trabalho é um Giroscópio de Controle de Momento, de quatro graus de liberdade. Suas dinâmicas são altamente não-lineares, e exigem uma abordagem diferente das utilizadas nos mais amplamente estudados sistemas lineares, tanto para análise quanto para modelagem. Normalmente, para a resolução deste tipo de problema, se lineariza um único ponto e se desenvolve um controle linear para o mesmo, porém, tal método não é eficaz para representação de um grande espaço de operação, pois tal modelo de controle é válido apenas muito próximo do ponto linearizado.

Através da análise de estabilidade a partir do segundo método de Lyapunov, obtemos um sistema de Desigualdades Lineares Matriciais (LMIs), que reduzem uma ampla variedade de problemas das teorias de sistemas e controle a alguns problemas de otimização convexos ou semiconvexos; estes problemas de otimização podem ser resolvidos numericamente de modo muito eficiente usando pacotes computacionais recentes de pontos interiores (BOYD, 1994), que permitem a resolução rápida e confiável desse tipo de problema. Utilizando estes métodos em vários pontos de operação do sistema, obtém-se um sistema linear dependentes de parâmetros (LPV) que abordam todo o comportamento do sistema.

MATERIAIS E MÉTODOS

O método direto de Lyapunov (também chamado de segundo método de Lyapunov) nos permite determinar a estabilidade de um sistema sem computar suas trajetórias. Tal método associa a estabilidade assintótica de um sistema à sua dissipação de energia.

Considere um sistema

$$\dot{x} = Ax. \quad (1)$$

Tal sistema é dito assintoticamente estável caso haja uma matriz simétrica P tal que a função de Lyapunov

$$V(x) = x'Px \quad (2)$$

seja definida positiva e possua derivada menor que zero. Ou seja:

$$\begin{cases} V(x) \\ \dot{V}(x) < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Algebricamente, chegamos à conclusão que para satisfazer o teorema de Lyapunov e garantir a estabilidade assintótica, a matriz P deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} P > 0 \\ A'P + PA < 0. \end{cases} \quad (4)$$

As desigualdades anteriores compõem um problema convexo, e são conhecidas por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs - *Linear Matrix Inequalities*) (BOYD, 1994). Para resolver estas desigualdades, podem-se usar diversos resolvedores e pacotes de otimização. Neste trabalho, serão utilizados o Rolmip e o SeDuMi.

As LMIs da Eq. (4) podem ser usadas para o cálculo de controladores. Considere um sistema de realimentação de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (5)$$

onde

$$u = Kx, \quad (6)$$

sendo K a matriz de ganhos de realimentação. Verificando a estabilidade deste novo sistema através das condições da Eq. (4), obtém-se o seguinte conjunto:

$$\begin{cases} P > 0 \\ A'P + K'B'P + PA + PBK < 0. \end{cases} \quad (7)$$

O produto das variáveis P e K resulta em uma bilineariedade, o que faz com que o problema deixe de ser convexo. Para obter um problema equivalente convexo, multiplica-se esta última LMI à esquerda e à direita por P^{-1} , obtendo-se assim

$$P^{-1}A' + P^{-1}K'B' + P^{-1}A + BKP^{-1} < 0, \quad (8)$$

Fazendo as seguintes substituições

$$Z = KP^{-1} \quad (9)$$

e

$$W = P^{-1}, \quad (10)$$

pode-se reescrever o conjunto de LMIs sem dependência de K:

$$\begin{cases} W = W' > 0 \\ WA' + AW + Z'B' + BZ < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Resolvendo o conjunto de LMIs da Eq. (11), sintetiza-se uma matriz de ganhos de realimentação K (caso exista a matriz P que satisfaça as condições da Eq. (4), que, garantidamente irá estabilizar o sistema. Tal ganho é calculado como

$$K = ZW^{-1}, \quad (12)$$

Sistemas lineares dependentes de parâmetros (LPV - do inglês *Linear Parameter-Varying*) são uma classe intermediária de sistemas entre os sistemas lineares invariantes no tempo (LTI - do *linear time-invariant*) e os sistemas não-lineares variantes no tempo. A ideia por detrás do uso dos sistemas LPV é utilizar vários modelos linearizados que representem o comportamento do sistema em

vários pontos de operação, de modo que represente todo o comportamento global. Tais modelos linearizados possuem coeficientes variantes no tempo, os quais são funções dos sinais de entrada do sistema, chamados *scheduling variables*.

Considere, por exemplo, um avião; em pleno voo, ele é um sistema não linear, mas, em uma altura constante, ele pode ser aproximado de um sistema LTI (COOK, 2007). Gerando um vetor de sistemas LTI correspondentes a diferentes altitudes, obtém-se uma aproximação do comportamento global do sistema. Nesse contexto, o conceito de *scheduling* significa a seleção do comportamento associado com uma altitude específica (TOTH, 2008). A representação do modelo global envolve coeficientes que multiplicam os diferentes comportamentos, que dependem, neste caso, da altura.

Considere agora um sistema LPV

$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u, \quad (13)$$

Caso esse sistema possua dois parâmetros, a definição de suas matrizes se dá por:

$$\begin{cases} A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \\ B(\alpha) = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2, \end{cases} \quad (14)$$

onde

$$\begin{cases} \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \end{cases} \quad (15)$$

Essa é a base da idéia de todo este trabalho, que será melhor detalhado ao decorrer do mesmo.

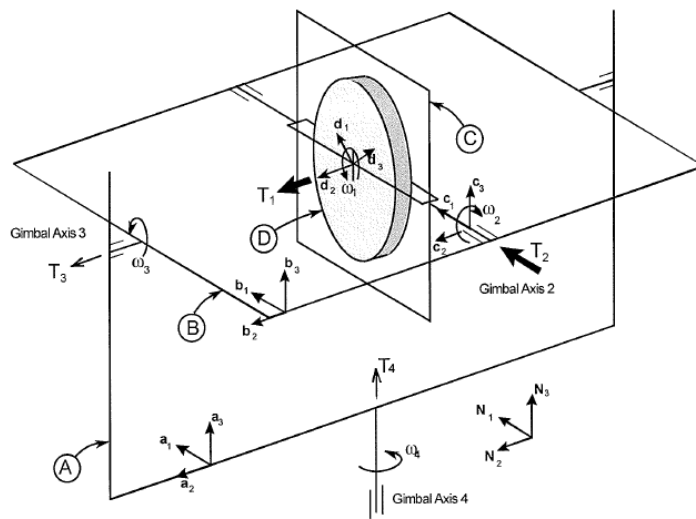
Para a modelagem do sistema mecânico, parte-se das coordenadas já fornecidas pelo fabricante. As equações de movimento linearizadas do sistema são encontradas a partir dos dois primeiros termos (ordem zero e um) da expansão da Série de Taylor das equações originais em volta de um ponto de operação dado (PARKS, 1999). O ponto de operação é definido como:

$$\begin{cases} \omega_1 = \Omega \\ q_2 = q_{2o} \\ q_3 = q_{3o}, \end{cases} \quad (16)$$

onde ω_1 é a velocidade angular do eixo 1, q_2 e q_3 são as posições angulares dos eixos 2 e 3, respectivamente, e T_1 e T_2 são os torques aplicados pelos motores nos eixos 1 e 2, respectivamente. Tais coordenadas podem ser melhor visualizadas na Figura 1, que mostra a definição das coordenadas.

Tal sistema é válido na proximidade de qualquer dado conjunto de coordenadas de qualquer possível configuração do aparato (PARKS, 1999). Neste trabalho, consideram-se as variáveis ω_1 , q_2 e q_3 parâmetros variantes no tempo, em vez de considerá-los fixos, como no manual.

Figura 1 – Definição das Coordenadas



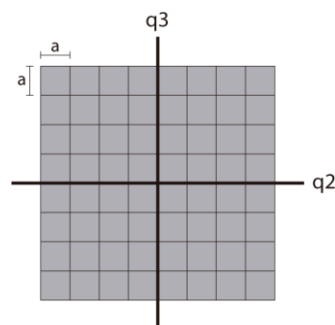
Fonte: PARKS, 1999

A partir da resolução do sistema de equações fornecido pelo manual (PARKS, 1999) em pontos de operação definidos, pode-se construir um sistema LPV semelhante à Eq. (13). Idealmente, variação dos parâmetros é linear, porém, dado a complexidade do sistema LPV, os parâmetros variantes terão seus eixos amostrados inicialmente em segmentos de comprimento igual à $\frac{\pi}{4}$. Para sua validação, será gerado um outro sistema LPV, cujo eixos dos parâmetros serão segmentados em comprimento igual à $\frac{\pi}{8}$, que, por conta da sua maior amostragem, será mais próximo do sistema real. Estes dois modelos, por fim, serão comparados para comprovar a representatividade e estabilidade esperada.

Define-se um espaço de três dimensões, em que seus eixos são q_2 , q_3 e ω . Para uma melhor visualização e compreensão, suponha que ω seja uma constante. Definindo $\omega=300 \text{ RPM}$, transforma-se o espaço em um plano.

Para ambos os eixos q_2 e q_3 , por conta da redundância nos cálculos de senos e cossenos, restringem-se seus valores entre $-\pi$ a π ; cada vértice é um sistema LTI resultante da linearização nos valores de q_2 e q_3 ali representados. Tal plano está representado abaixo na Figura 2 (“a” tem valor de $\frac{\pi}{4}$).

Figura 2 – Plano dos ângulos q_2 e q_3



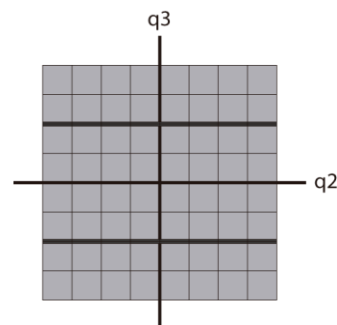
Fonte: Autoria própria.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O procedimento descrito na metodologia foi implementado através de um algoritmo gerado no software MatLab, utilizando as Toolboxes SeDuMi e Rolmip. Inicialmente, toda a faixa com valores de q_3 entre $\frac{-3\pi}{4}$ até $\frac{-\pi}{4}$ e entre $\frac{\pi}{4}$ até $\frac{3\pi}{4}$ se mostrou inactivível.

Rodando o algoritmo apenas nas regiões não factíveis e analisando cada vértice, percebe-se que as regiões no eixo de q_3 compreendidas entre $\frac{-\pi}{2} \pm 0.05$ e $\frac{\pi}{2} \pm 0.05$ se mostram inactivíveis, pois há uma singularidade no sistema que o faz deixar de ser controlável, como se pode ver na Figura 3 (as regiões inactivíveis estão em cinza mais escuro).

Figura 3 – Regiões inactivíveis



Fonte: Autoria própria.

Após esta descoberta, adicionou-se no algoritmo uma condição que ignore estas faixas inactivíveis de q_3 na análise. Rodando-o novamente, foi garantido a estabilidade de todo o plano $q_2 \times q_3$. O algoritmo também foi rodado para valores de ω de 200 RPM e 300 RPM.

O grupo de trabalho gerou condições de verificação para este tipo de procedimento, e estas condições dependem da diferença entre a dinâmica real e a amostrada do sistema. Para tal verificação, é necessário o cálculo das normas das matrizes de cada sistema presente no modelo LPV (tais condições ainda estão em desenvolvimento).

Para a validação deste modelo em específico, foi gerado um algoritmo comparador. Cada iteração do algoritmo subtrai as matrizes do sistema original de seus subjacentes em cada direção do sistema mais amostrado. Foi tirada a norma 2 da diferença desta diferença das matrizes, que pode ser formalmente descrita como o maior valor singular de uma matriz. Tais valores de norma foram armazenados em um vetor para fins de análise e comparação.

O mesmo procedimento foi refeito, mas desta vez segmentando os eixos originalmente em valores de comprimento igual a $\frac{\pi}{8}$ e comparando com um novo modelo mais amostrado, segmentado em valores iguais a $\frac{\pi}{16}$, além de utilizar os valores adicionais de ω de 250 RPM e 350 RPM.

Após as comparações, foi encontrado o valor de erro máximo para as matrizes A e B nos dois casos descritos. Tais valores são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Erro entre os modelos

Matriz	Menor Amostragem	Maior Amostragem
A	295.1484	153.8260
B	9.4589	4.7438

Fonte: Autoria própria.

CONCLUSÃO

Analisando os maiores valores de erro, conclui-se que, com a maior amostragem do sistema, pode-se chegar num modelo global paramétrico que abrangendo a totalidade da dinâmica do giroscópio de modo satisfatório. Os valores de erro encontrados estão dentro dos valores esperados.

Como proposta de continuidade, os ganhos encontrados serão implementados no sistema real e os resultados serão comparados com os obtidos teoricamente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná pela participação no Programa de Voluntariado em Iniciação Científica e Tecnológica e ao professor Cristiano Marcos Agulhari pela brilhante orientação.

REFERÊNCIAS

BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. 1. Ed. Philadelphia: SIAM, 1994.

COOK, M. V. **Flight Dynamic Principles**. 2. ed. Massachussets: Elsevier Ltd., 2007.

KING, A. **Inertial Navigation**: Forty Years of Evolution. GEC Review, 1998. p. 140-149.

PARKS, T. R. **Manual for Model 750**: Control Moment Gyroscope. Instructor's. Bell Canyon, California: ECP, 1999.

TOTH, R. **Modeling and Identification of Linear Parameter Varying Systems**: An Orthonormal Basis Function Approach. (Lecture notes in control and information sciences; Vol. 403). Netherlands: Wöhrmann Print Service, 2008.