

## Implementação de filtros de Kalman para estimação de estados

## Implementation of Kalman filters for state estimation

### RESUMO

**Raul Kaizer Conselheiro**  
[raulkaizer@hotmail.com.br](mailto:raulkaizer@hotmail.com.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, Paraná, Brasil

**Cristiano Marcos Agulhari**  
[agulhari@utfpr.edu.br](mailto:agulhari@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, Paraná, Brasil

O objetivo deste projeto foi o estudo, desenvolvimento e implementação de um filtro de Kalman para aplicação no equipamento torcional e comparação dos resultados obtidos com o controlador desenvolvido por um projeto prévio. Por meio do estudo dos conceitos básicos e aplicação em problemas didáticos foram levantados os pontos necessários para esclarecer quais adaptações deveriam ser feitas tanto nos códigos do programa quanto no método de implementação utilizados. Após obter êxito na implementação do controlador acoplado ao filtro os resultados obtidos deixaram claro que embora a utilização do filtro tenha sido capaz de controlar o sistema, a utilização de um controlador especificamente projetado para tal tarefa oferece desempenho superior assim como menor custo computacional.

**PALAVRAS-CHAVE:** Filtragem de Kalman. Sistemas de controle digital. Processamento de sinais.

### ABSTRACT

The objective of this project is the study, development and implementation of a Kalman filter for application in the torsional equipment and comparison of the results obtained with the controller developed by a previous project. Through the study of basic concepts and application in didactic problems, the necessary points were raised in order to clarify which adaptations should be made both in the program codes and in the implementation method used. After successfully implementing the controller coupled to the filter, the results obtained made it clear that although the use of the filter was able to control the system, the use of a controller specifically designed for this task offers superior performance as well as lower computational cost.

**KEYWORDS:** Kalman filtering. Digital control systems. Signal processing.

**Recebido:**  
**Aprovado:**

**Direito autoral:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

A utilização do filtro de Kalman tem se instaurado proporcionalmente ao aumento da utilização e tratamento de sinais (Bai,2020) e dados estatísticos (Anshori,2020). Com a necessidade de manter taxas de precisão altas em sistemas cujo acesso ou acompanhamento contínuo se mostra inviável, a utilização do filtro de Kalman torna-se uma das opções de solução. Como ele obtém estimativas de estados passados, presentes e futuros utilizando-se da recursividade e da minimização do erro quadrático decidiu-se fazer a comparação da saída estimada pelo filtro de Kalman e custo computacional em relação ao controlador e custo de um trabalho previamente realizado (Jacinto, 2019).

Embora o filtro de Kalman seja confiável em procedimentos de estimação de informações a partir de sinais afetados por ruídos ou imprecisões (Brown, 2012), alguns fatores devem ser observados para atestar a verossimilhança dos valores obtidos. A classificação dos ruídos afetando o sistema, que devem ser brancos e gaussianos, e o tipo de sistema a ser estudado, que pode ser linear ou não-linear.

Recentemente, foi desenvolvido um trabalho voltado à aplicação de controladores especificamente projetados para otimizar critérios de robustez com base em medidas advindas de teoria de informação, atuando em sistemas afetados por ruídos externos (Jacinto, 2019). Como o filtro de Kalman obtém estimativas de estados passados, presentes e futuros utilizando-se da recursividade e da minimização do erro quadrático, esse trabalho foi realizado visando a comparação entre o controlador proposto e o controle realizado por um controlador clássico em conjunto com um filtro. O controlador proposto minimiza a entropia do erro de controle, já o controlador clássico com filtro apresentou a oportunidade da implementação do filtro de Kalman.

O objetivo deste trabalho é, então, estudar a síntese e implementação de filtros de Kalman em sistemas de controle, análogo ao sistema proposto em (Jacinto, 2019), e a comparação dos resultados obtidos pelo controlador em relação ao filtro.

## MATERIAL E MÉTODOS

Devido à complexidade de entendimento e aplicação do filtro no início dos estudos o foco foi a aplicação de códigos simples de retroalimentação e predição visando a habituação com esse tipo de tratamento e abordagem dos dados. Os procedimentos a seguir foram implementados no *software* Matlab.

O filtro visa analisar os estados passados de um sistema e, baseado nisso, definir um ganho que será utilizado na predição dos estados futuros (Brown, 2012). Ao longo do processo a saída real do sistema é comparada à saída estimada para que o ganho possa ser ajustado. Considere o sistema

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (1)$$

$$y_k = C_k x_k + D_k u_k \quad (2)$$

Sendo  $x_{k+1}$  os estados e  $y_k$  as saídas;  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  e  $D_k$  matrizes de dimensões apropriadas e  $u_k$  a entrada de referência.

Para o equacionamento do filtro é necessário que a cada instante  $k$  os valores das variáveis sejam atualizados levando em conta os ruídos (ou erros), ou seja,

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k \quad (3)$$

$$z_k = Cx_k + v_k \quad (4)$$

sendo  $x_k$  o estado atual do sistema,  $x_{k-1}$  o estado anterior,  $w_k$  o ruído do processo,  $z_k$  a atual observação do sistema e  $v_k$  o ruído da observação.

A fase de atualização é iniciada pela estimativa dos estados  $\hat{x}_k$  sendo esta calculada por meio do erro de estimativa do estado anterior multiplicado pelo ganho de Kalman  $K_k$ .

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k(z_k - C\hat{x}_{k-1}) \quad (5)$$

Para a atualização do ganho  $K_k$  é necessário ter, ao menos, a noção básica do erro de leitura  $R$  (matriz de correlação dos erros de leitura). Assim,  $K_k$  pode ser computado em termos de  $R$ .

$$K_k = P_k C^T (C P_k C^T + R)^{-1} \quad (6)$$

Note que  $R$  não possui o subscrito  $k$  já que não depende do tempo. A variável  $P_k$  é o erro de predição que é computado recursivamente por

$$P_k = (I - K_k C) P_{k-1} \quad (7)$$

em que  $I$  é a matriz identidade de ordem adequada. Agora se inicia a fase de predição da estimativa dos estados em que  $x_k$  será

$$x_k = Ax_{k-1} \quad (8)$$

Do mesmo modo que  $x_k$ ,  $P_k$  deve ser atualizada fazendo

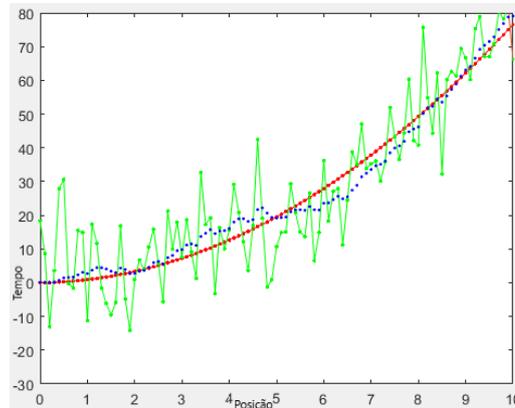
$$P_k = AP_{k-1}A^T \quad (9)$$

sendo  $A^T$  a transposta da matriz  $A$ .

Com essas equações de predição e atualização, a estrutura básica do filtro está pronta (Terejanu, 2013).

Com as equações definidas para matrizes, foi escolhido um modelo matemático do voo de um pássaro para o desenvolvimento de uma atividade de teste onde o filtro deveria estimar a saída do sistema. O resultado pode ser visto na Figura 1 onde a posição real do pássaro está em vermelho, a posição estimada sem o filtro de Kalman em verde (utilizando retroalimentação para definir ganhos) e a posição estimada pelo filtro de Kalman em azul.

Figura 1 – Posição do pássaro em relação ao tempo



Fonte: Autoria própria (2020).

Embora a estimação não seja totalmente precisa, para um exercício de teste ele apresentou resultados satisfatórios visto que, mesmo o ruído não atendendo aos requisitos do filtro de Kalman, a estimação com o filtro (azul) foi melhor que a estimação sem o filtro (verde). Isso possibilitou que o trabalho tivesse prosseguimento, agora para implementação no sistema de controle proposto.

Nesta etapa, o trabalho já se aproximava de seu objetivo final: realizar o controle do equipamento conhecido como “torcional”. A comparação com os resultados obtidos pelo controlador desenvolvido no trabalho sobre controladores para otimização dos critérios de robustez (Jacinto, 2019) seria então realizada e, finalmente, a complementação dos registros sobre a viabilidade e necessidade de controladores especificamente projetados para um sistema em detrimento a controladores genéricos, mesmo que estes estejam acoplados a filtros.

Novamente algumas alterações no filtro foram necessárias para se adequar à dinâmica do sistema do equipamento e, sendo necessário adotar alguma metodologia que fosse capaz de realizar tarefas simultâneas visto que o *software* utilizado não estava preparado para executar o processo de filtragem de maneira paralela ao sistema de controle. Outro empecilho foi o fato que os ruídos presentes no sistema e na leitura realizada pelos sensores não atendiam às necessidades do filtro de Kalman, que foi desenvolvido para tratamento de ruídos gaussianos brancos.

Figura 2 - Planta Torcional



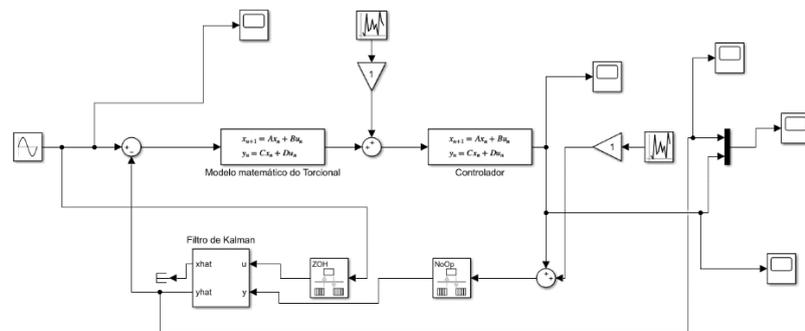
Fonte: Parks (1999).

Na Figura 2, os itens enumerados se referem a:

- a) Sensores de posição em cada disco (codificador óptico de alta resolução) que medem o deslocamento angular;
- b) Discos de fácil remoção ou que podem ser travados;
- c) Cabo de torção;
- d) Ajustadores de momento de inércia (Pesos móveis e removíveis);
- e) Suporte de rolamentos (Rolamentos de precisão em cada disco);
- f) Atuador (Servo motor DC de alto torque, sem escova);
- g) Correia de distribuição rígida com redução de velocidade 3:1;

Inicialmente foi desenvolvido um diagrama unicamente para a implementação do filtro de Kalman. Para que os parâmetros do filtro fossem inseridos da maneira correta, fez-se necessário colocar a dinâmica do sistema em malha fechada, conforme ilustrado na Figura 3. Após essa alteração, utilizando ruídos brancos aleatórios, as simulações apresentaram os resultados esperados de estimação e controle da posição dos discos tornando possível dar seguimento ao processo e testar a aplicação no torcional.

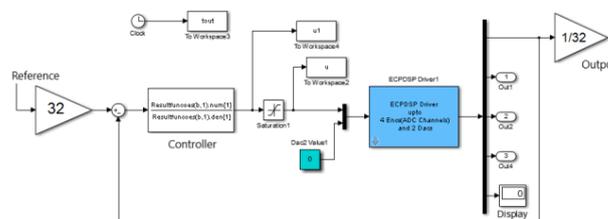
Figura 3 - Diagrama do modelo real desenvolvido para implementação do filtro



Fonte: Autoria própria (2020).

Embora ele tenha funcionado para as simulações, o modelo apresentado se mostrou incapaz de lidar com a dinâmica dos ruídos do banco de dados utilizado para o torcional e apresentou custo computacional maior que o esperado. Além disso, foi necessário adaptar o modelo para que fosse executado no sistema real, que está presente no Laboratório de Controle e Otimização de Sistemas (LACOS) da UTFPR-CP. A Figura 4 apresenta o modelo do sistema de controle aplicado à planta física, ainda sem o filtro de Kalman desenvolvido neste trabalho.

Figura 4 - Controlador de posição do torcional

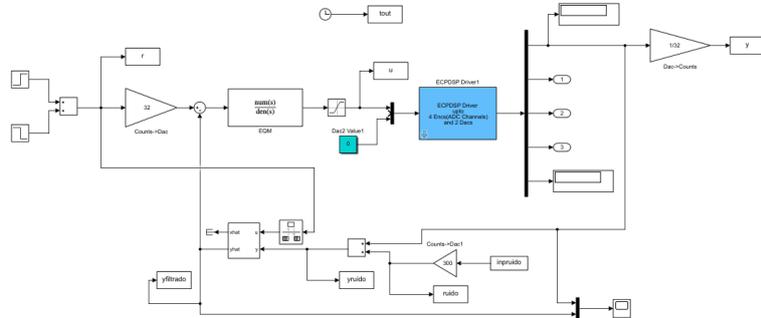


Fonte: Autoria própria (2020).

O filtro então foi introduzido e o controlador desenvolvido no trabalho de referência (Jacinto, 2019) foi alterado para um controlador por função de transferência sob influência do filtro de Kalman. Para facilitar o entendimento e a

alteração de parâmetros, foi utilizado um bloco específico do filtro de Kalman sintetizando o diagrama e tornando-o mais intuitivo.

Figura 5 - Controlador do torcional adaptado com filtro de Kalman



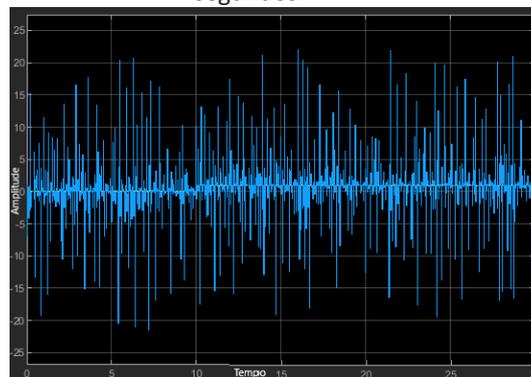
Fonte: Autoria própria (2020).

A implementação do diagrama mostrado na Figura 5 foi então aplicada e os resultados obtidos, em parte apresentados na seção a seguir, foram utilizados para compor um artigo atualmente em submissão.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após implementar e compilar os códigos e os diagramas é possível perceber na Figura 6, que apresenta a comparação entre o sinal de saída estimado e o sinal de referência que consiste de um degrau unitário iniciado aos 10 segundos, que a saída estimada apresenta uma taxa de ruído alta em relação ao sinal original já que os ruídos de leitura e do sistema utilizados não foram ruídos brancos. Foi possível verificar tanto na simulação gráfica (Figura 07) quanto no equipamento físico o controle realizado pelo filtro de Kalman. Embora erros e taxas de variação ainda ocorressem nas previsões e correções do filtro e as próprias leituras do sinal real de saída não tivessem precisão.

Figura 6 - Saída estimada para uma referência degrau unitário, iniciado aos 10 segundos.

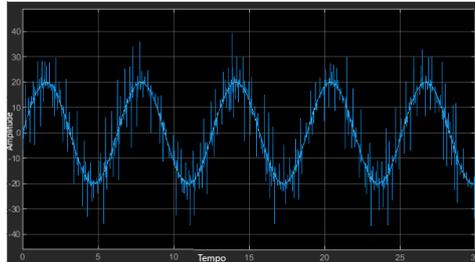


Fonte: Autoria própria (2020).

Os ruídos apresentados na imagem provam o ponto de que a aplicação do filtro em uma situação real, onde os ruídos não são brancos e gaussianos, não é a mais adequada. Ao realizar o teste no equipamento é possível comparar o controle

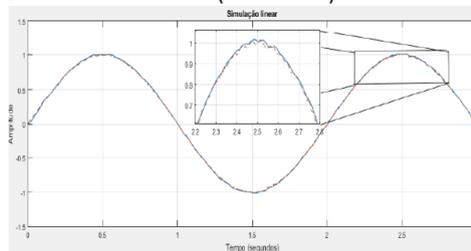
feito pelo controlador desenvolvido no trabalho de referência e pelo controlador com filtro acoplado desenvolvido neste trabalho:

Figura 7: Saída estimada pelo filtro de uma entrada senoidal



Fonte: Autoria própria (2020).

Figura 8: Saída do controlador do trabalho de referência (azul) em relação à referência (vermelho)



Fonte: Jacinto (2019).

## CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo o desenvolvimento e implementação de um filtro de Kalman visando a eliminação de ruídos de sistemas de controle que, posteriormente foi utilizado no controle de um sistema torcional.

O custo computacional da implementação do filtro de Kalman é relativamente alto, sendo portanto importante avaliar se o sistema a ser considerado é de fato apropriado para ser utilizado em conjunto com tal filtro. Apesar de ser otimizado para lidar com ruídos gaussianos brancos, o filtro de Kalman pode ter um comportamento sub-ótimo em outras situações o que acaba por restringir sua utilização.

Como propostas futuras, é esperado o estudo de métodos para a aplicação do filtro de Kalman com ruídos diversos assim como a análise da utilização do filtro de Kalman extendido. Também é interessante estudar um método de filtragem e controle mais robusto e com custo computacional reduzido.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu orientador, Cristiano, por me atender durante à noite e a madrugada e a minha esposa Sara que passou noites em claro estudando ao meu lado enquanto fazia companhia.

## REFERÊNCIAS

ANSHORI, M. Y. et al. Profitability Estimation of A Company In PT. ABCD Using Extended Kalman Filter. The Third International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Network Topology, University of Jember- Indonesia, 2020. 7 p. DOI:10.1088/1742-6596/1538/1/012036. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1538/1/012036/meta>. Acesso em: 4 set 2020.

BAI, Yu-ting et al. A Neuron-Based Kalman Filter with Nonlinear Autoregressive Model. Sensors, China, v. 1, n. 299, p. 1- 21, jan. 2020, Disponível em: <https://www.mdpi.com/1424-8220/20/1/299>. Acesso em: 04 set. 2020.

BROWN, Robert.; HWANG, Patrick. Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering: With Matlab Exercises. 4. ed. Estados Unidos da América: John Wiley & Sons, Inc, 2012. E-book.

JACINTO, Daniel Cordeiro. Controle de posição utilizando algoritmo genético com minimização de entropia do erro. 2018. 68 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2018.

LEVY, Simon. The Extended Kalman Filter: An Interactive Tutorial for Non-Experts. Washington and Lee University, c2018. Página inicial. Disponível em: <https://simondlevy.academic.wlu.edu>. Acesso em: 03 de set. de 2020.

HARGRAVE, P. A tutorial introduction to Kalman filtering, IEE Colloquium on Kalman Filters: Introduction, Applications and Future Developments, Londres, Reino Unido, p. 1-6, 1989.

PARKS, T. Manual For Model 205/205<sup>a</sup> Torsional Control System, ECP, Educational Control Products, 1 Buckskin Court, Bell Canyon, CA.

SRINIVASAN, Sharath. The Kalman Filter: Na algorithm for making sense of fused sensor insight. Towards Data Science: Sharing concepts, ideas and codes, 2018. Disponível em: <https://towardsdatascience.com/kalman-filter-an-algorithm-for-making-sense-from-the-insights-of-various-sensors-fused-together-ddf67597f35e>. Acesso em 03 de set de 2020.

TEREJANU, Gabriel. Discrete kalman filter tutorial. Buffalo, Nova York, 2013. Disponível em: <https://www.cse.sc.edu/~terejanu/files/tutorialKF.pdf>. Acesso em: 04 set. 2020.

ZHANG, Jianhua et al. Minimum error entropy filter for fault detection of networked control systems, *Entropy, China*, n. 14(3), p. 505-516, 2012. DOI: [10.3390/e14030505](https://doi.org/10.3390/e14030505). Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/267779858\\_Minimum\\_Error\\_Entropy\\_Filter\\_for\\_Fault\\_Detection\\_of\\_Networked\\_Control\\_Systems](https://www.researchgate.net/publication/267779858_Minimum_Error_Entropy_Filter_for_Fault_Detection_of_Networked_Control_Systems). Acesso em: 04 set. 2020.