X Seminário de Extensão e Inovação
XXV Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica
23 a 27 de Novembro | Toledo - PR

https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2020

Uma aproximação ao número pi através do Conjunto de Mandelbrot

An approximation to the pi number through the Mandelbrot Set

Matheus Fernando Albertoni
albertoni@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Gustavo Henrique Dalposso
gustavodalposso@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

RESUMO

O termo fractal foi criado por B. Mandelbrot para classificar figuras que exibem padrões semelhantes em escalas cada vez menores. O conjunto Mandelbrot é o conjunto de pontos C no plano complexo resultante de uma simples equação, tal que aplicando iteração repetidamente, o módulo de Z_n deve ser menor ou igual a 2. Ele possui diversas características apresentando um cardioide no centro, bulbos de vários tamanhos em volta e duas regiões que foram nomeadas como *Seahorse Valley* e *Elephant Valley*. Na tentativa de demonstrar que a intersecção entre o cardioide e o bulbo à esquerda é somente de um ponto, localizado em *Seahorse Valley*, David Boll realizou um experimento em 1991 onde calculou o número de iterações necessárias para que a série divergisse para $(-0.75, xi)$ de modo que x esteja tendendo a 0. Para sua surpresa, o valor não resultou como o esperado, entretanto, o valor resultante foi uma aproximação convergente ao número pi. Neste sentido, o objetivo deste trabalho é apresentar uma aproximação do número pi utilizando dados que são encontrados no Conjunto de Mandelbrot.

PALAVRAS-CHAVE: Conjunto de Mandelbrot. Número pi. Iterações.

ABSTRACT

The term fractal was coined by B. Mandelbrot for classification figures that exhibit similar patterns on increasingly smaller scales. The Mandelbrot set is the set of points C in the complex plane resulting from one simple equation, such that when repeatedly iterating, the one of Z_n must be less than or equal to 2. It has several amplified characteristics, a cardioid in the center, bulbs of various sets back and two regions that were named as Seahorse Valley and Elephant Valley. In an attempt to demonstrate that the intersection between the cardioid and the left bulb is only one point, located in Seahorse Valley, David Boll did an experiment in 1991 where he calculated the number of iterations necessary for the series to diverge to $(-0.75, xi)$ so that x is tending to 0. To your surprise, the value did not work as expected, however, the resulting value was a convergent approximation to the number pi. In this sense, the objective of this work is to present an approximation of the number pi using data that are found in the Mandelbrot Set.

KEYWORDS: Mandelbrot set. Pi number. Iterations.

Recebido: 19 ago. 2020.
Aprovado: 01 out. 2020.

INTRODUÇÃO

Fractal é um padrão geométrico que pode ser separado em partes, cada uma delas é uma escala reduzida semelhante do todo (Mandelbrot, 1999). Estas imagens complexas podem ser criadas através de diversas fórmulas matemáticas simples, de tal forma que, se alterada alguns critérios pode-se gerar obras únicas. Dessa forma, calculando repetidamente uma equação inúmeras vezes, é possível gerar um fractal. O termo fractal foi denominado por Benoit Mandelbrot no século XX baseando-se no latim, que significa quebrar, criar fragmentos irregulares (Barbosa, 2016).

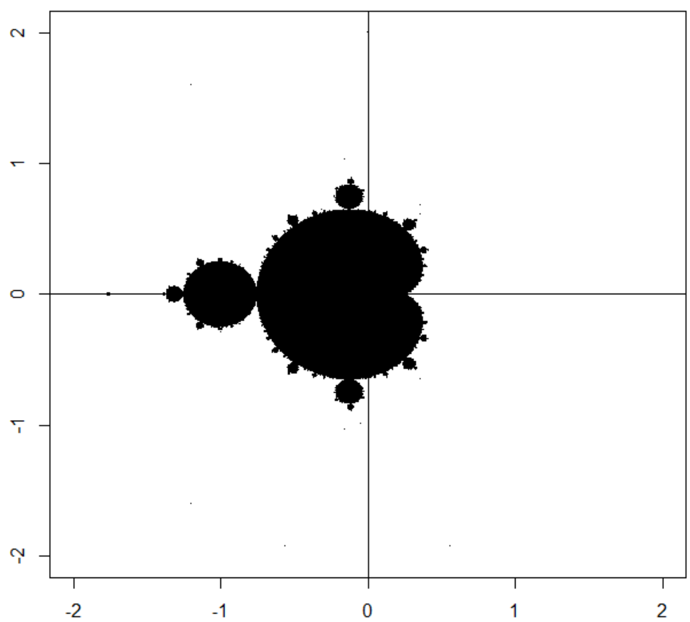
Além de definir o que era fractal, Mandelbrot também descobriu um dos fractais mais conhecidos atualmente, o Conjunto de Mandelbrot definido pela equação $Z_{n+1} = Z_{n^2} + C$ (Devaney, 2006). Partindo de um ponto C qualquer no plano complexo, e, considerando inicialmente $C = 0$, as interações são feitas de acordo com as coordenadas deste ponto, ou seja, a primeira interação será 0, a segunda C, terceira $C^2 + C$, assim por diante. Se em algum momento $|Z| > 2$ ocorrer, então o ponto C não pertencerá ao conjunto de Mandelbrot.

Algumas características matemáticas podem ser encontradas ao se explorar o conjunto de Mandelbrot. Dito isto, o objetivo deste trabalho é apresentar uma aproximação do número pi que é encontrado no Conjunto de Mandelbrot.

PI NO CONJUNTO DE MANDELBROT

O Conjunto Mandelbrot (Figura 1) é um famoso fractal definido por uma regra muito simples $Z_{n+1} = Z_{n^2} + C$. No entanto, ele possui propriedades interessantes e complexas que podem ser vistas graficamente. Isso está, sem dúvida, relacionado ao fato de ser um objeto fractal.

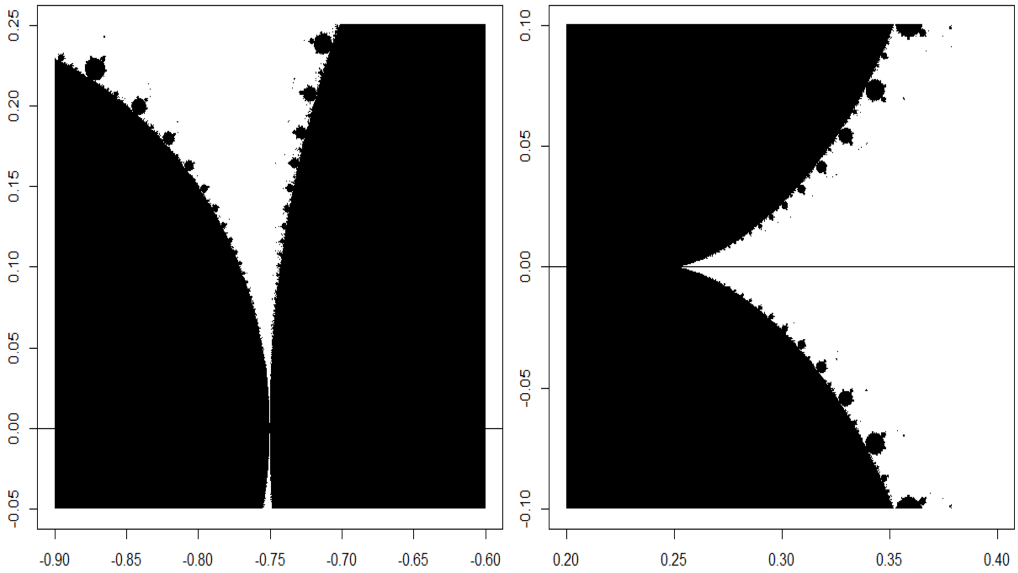
Figura 1 – Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Autor (2020)

Por possuir inúmeros detalhes, algumas regiões receberam nomes especiais como, por exemplo, o *Seahorse Valley* e o *Elephant Valley* (Figura 2).

Figura 2 – (A) *Seahorse Valley* e o (B) *Elephant Valley*



(A) *Seahorse Valley* (B) *Elephant Valley*

Fonte: Autor (2020)

Em 1991, David Bolle observando as regiões marcadas na Figura 2(A), tentou verificar se o ponto $(-0.75{,}0 + 0i)$ conectava o cardioide com o bulbo à esquerda. Ou seja, para testar se existia apenas um ponto como intersecção entre as duas regiões, David Bolle foi utilizando valores cada vez menores no sentido vertical. Dessa forma, acrescentando um valor x tendendo a 0 no ponto $(-0.75{,}0 + 0i)$ apenas no eixo imaginário, ele possui relação com a quantidade de iterações necessárias para o ponto divergir do Conjunto de Mandelbrot, obtendo como resultado uma aproximação para o famoso número pi.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dispondo da mesma linha de raciocínio de David Bolle, utilizaremos o software Microsoft R Open (MICROSOFT, 2014) para efetuar os cálculos e chegar em uma aproximação do número pi. Portanto, o ponto que usaremos é $(-0.75, 0 + xi)$, tal que $x \to 0$. Vejamos um exemplo para $x = 1$ na Tabela1:

Tabela 1 – Iterações no ponto $(-0.75, i)$

Z_n	$\lvert Z_n \rvert$
$Z_0 = 0.000 + 0.00i$	$\lvert Z_0 \rvert = 0$
$Z_1 = -0.750 + i$	$\lvert Z_1 \rvert = 1.25$
$Z_2 = -1.1875 - 0.5i$	$\lvert Z_2 \rvert = 1.28847$
$Z_3 = 0.4101 + 2.1875i$	$\lvert Z_3 \rvert = 2.2256$*

*Módulo de Z_3 é maior que 2.

Fonte: Autor (2020).

Analisando a Tabela 1 é evidente que, na 3° iteração do ponto $(-0.75, i)$, comprovamos que ele não pertence ao Conjunto de Mandelbrot, dado que seu módulo é maior que 2. Agora, utilizando números mais próximos de 0 para x, teremos os seguintes resultados:

Tabela 2 – Iterações no ponto $(-0.75, 0 + xi)$

X	Iterações
1	3
0.1	33
0.01	315
0.001	3143
0.0001	31417
0.00001	314160
0.000001	3141593
0.0000001	31415927

Fonte: Autor (2020).

Observando a Tabela 2 é possível ver que, quanto mais próximo de 0 for o valor de x, a quantidade de iteração para verificar se o ponto pertence ao Conjunto de Mandelbrot converge a pi.

CONCLUSÃO

O Conjunto de Mandelbrot é um dos fractais mais conhecidos e se destaca por apresentar diversas curiosidades e propriedades matemáticas. Neste trabalho, exploramos uma forma de obter aproximações para o famoso número pi e, embora esta não seja a maneira mais eficiente entre as existentes, é impressionante como este número está presente em diversos lugares.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal-para a sala de aula**. Autêntica, 2016.

DEVANEY, Robert. **Unveiling the Mandelbrot set**, disponível em: https://plus.maths.org/content/unveiling-mandelbrot-set. Acesso em: 25 ago. 2020.

MANDELBROT, Benoit B.; FRAME, Michael. The canopy and shortest path in a self-contacting fractal tree. The Mathematical Intelligencer, v. 21, n. 2, p. 18-27, 1999.

MICROSOFT, R APPLICATION NETWORK. **Microsoft R Open**. 2014.