

## Análise computacional da dinâmica de um pêndulo duplo

### Computational analysis of the dynamics of a double pendulum

#### RESUMO

O estudo tem como objetivos estudar os ângulos máximo a direita e à esquerda (AMED) que a haste central de um pêndulo duplo alcançou durante a simulação e o estudo de rotação que a haste externa realiza em torno do próprio eixo de rotação. A simulação realizou-se através de software de modelagem 3D, Autodesk Inventor 2020, onde foi projetado, montado e simulado o movimento do pêndulo duplo. Por meio da simulação realizada por software, o estudo dos AMED com inclinação de partida diferente e calcular o período de ocorrência entre uma e outra inversão. Assim, determinou-se a quantidade de rotação completas que a haste externa realizou. As análises foram realizadas sem aplicação de força de atrito ou qualquer tipo de torque.

**PALAVRAS-CHAVE:** Pêndulo duplo. Dinâmica. Análise computacional.

#### ABSTRACT

The study aims to study the maximum right and left angles (AMED) that the central rod of a double pendulum reached during the simulation and study of rotation that the external rod performs around the own axes of rotation. The simulation was carried out using 3D modeling software, Autodesk Inventor 2020, where was designed, assembled and simulated the double pendulum motion. Through simulation performed by software, the study of AMED with different starting slope and calculating the period of occurrence between one and the other inversion. Thus, it was determined the amount of complete rotation that the external rod performed. The analyzes were performed without applying frictional force or any type of torque.

**KEYWORDS:** Double pendulum. Dynamics. Computational analysis.

João Felipe Rodrigues de Moraes  
[joaor.moraes@hotmail.com](mailto:joaor.moraes@hotmail.com)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Marcelo José Alba  
[marceloalba@utfpr.edu.br](mailto:marceloalba@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

**Recebido:** 04 set. 2020.

**Aprovado:** 01 out. 2020.

**Direito autoral:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



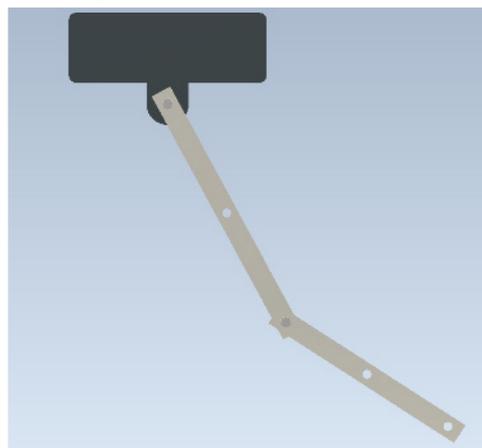
## INTRODUÇÃO

Os pêndulos duplos planares têm, em sua dinâmica, um comportamento que é conhecido como sendo caótico (STACHOWIAK e OKADA, 2006). Apesar de não ter uma utilização tão ampla como outros mecanismos, ou até mesmo o pêndulo simples, o pêndulo duplo ocorre frequentemente no transporte de cargas por guias ou pontes rolantes, assim como têm sido objeto de interesse e estudo nas áreas de robótica.

Estudos que datam desde o início do século XX, demonstram que pêndulos de até três hastes podem ser estabilizados com o uso de vibração mecânica em sua base (STEPHENSON, 1908, 1909; LOWENSTERN, 1932; KAPITSA, 1951; LANDAU e LIFSHITS, 1976; apud NIKOLAI, 2015). Além dos trabalhos citados, outros trabalhos apresentam estudos e soluções experimentais e teóricas ao problema da falta de estabilidade em guias e pontes rolantes industriais. No entanto, notou-se uma dificuldade em encontrar dados que relatem o comportamento explícito de um pêndulo duplo, motivo que levou a este estudo.

Formado por uma haste central e outra externa, conforme é apresentado na Figura 1, o pêndulo duplo forma um sistema conservativo e não-linear. Shinbrot *et al.* (1992), em um estudo sobre o comportamento caótico em pêndulos duplos, demonstraram que o movimento das hastes é fortemente dependente das condições iniciais. No movimento pode ou não haver rotação completa em torno dos eixos de ambas as hastes ou apenas da haste externa. Apesar de ser aqui suprimido, em Akerlof (2012) é possível encontrar uma descrição do equacionamento matemático para o pêndulo duplo com massa distribuída, como o da Figura 1.

Figura 1 – Pêndulo duplo planar



Fonte: Autoria própria (2020)

Devido às facilidades construtivas, o estudo sobre o pêndulo duplo, é uma das formas mais simples de entender o movimento caótico. As ferramentas computacionais auxiliam nas atividades de projeto e simulação, tornando possível a visualização do movimento em tempo real com a emissão de dados e gráficos que permitem a análise do comportamento dinâmico.

Dessa forma, neste trabalho foi analisado o comportamento de um pêndulo duplo por meio de simulações feitas no software Autodesk Inventor 2020. Foi

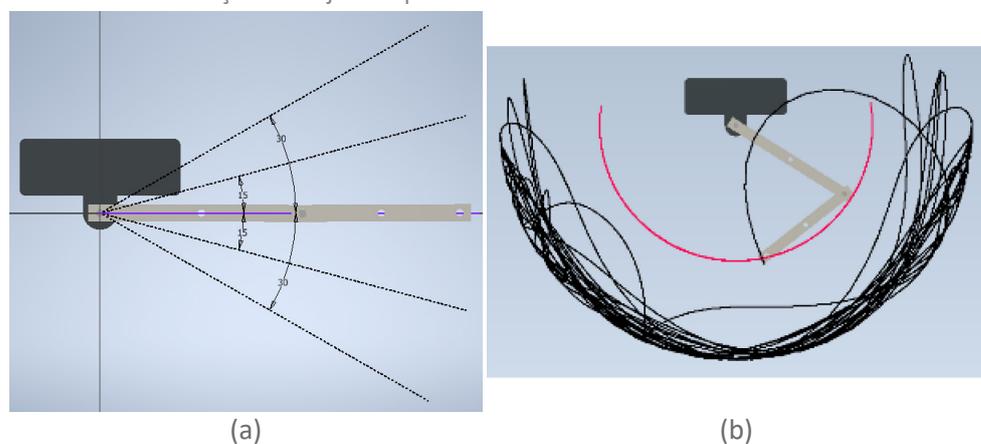
possível analisar o movimento caótico da haste externa em relação à haste central. Os objetivos eram determinar os ângulos máximos à esquerda e à direita (AMED) da haste central (com relação à vertical em sentido negativo) em função da variação nos ângulos de partidas, e saber quantas voltas completas a haste externa realiza em torno do seu eixo de rotação. Ambos os resultados podem colaborar com o entendimento do movimento caótico dos pêndulos duplos planares.

## MATERIAIS E MÉTODOS

No estudo foi realizada uma simulação para averiguar como o pêndulo duplo iria reagir à ação da força da gravidade. Apesar da óbvia presença de torques restritivos ao movimento das hastes em uma situação real, a simulação foi realizada sem atuação de um torque externo. Para alcançar os objetivos do trabalho utilizou-se do software Autodesk Inventor 2020, onde foi o projetado, montado e simulado o movimento do pêndulo duplo planar mostrado na Figura 1. Além das conhecidas técnicas de desenho e montagem, destaca-se aqui a utilização do ambiente “Simulação Dinâmica” dentro do Inventor, cuja funcionalidade é determinar apontar as restrições, forças e torques a qual um sistema está submetido e, pela solução numérica das equações dinâmicas, simular e analisar graficamente o comportamento dinâmico do sistema.

A investigação deu-se início por meio do rastreamento do movimento da haste central (500x38 mm), para descobrir os AMED alcançados. Essa análise foi realizada utilizando diferentes ângulos de partida em relação à horizontal em seu sentido positivo, ou seja, os ângulos de  $-30^\circ$ ,  $-15^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $15^\circ$  e  $30^\circ$ , conforme pode ser observado na Figura 2a. As simulações foram feitas com ângulos diferentes para observar qual seria o comportamento dinâmico da haste central. Para obter esses resultados foi analisado o traço vermelho do gráfico do movimento, conforme o exemplo da Figura 2b. Para facilitar a comparação entre o AMED, os valores foram registrados com relação ao eixo de *quasi* simetria ao movimento, ou seja, o eixo vertical em seu sentido negativo.

Figura 2 – (a) Inclinações usadas no lançamento e seus respectivos ângulos e (b) exemplo dos traços de trajetória para a extremidades de ambas as hastes.



Fonte: Autoria própria (2020).

Logo após, os AMED da haste central serem analisados, teve início os estudos da haste externa (400x38 mm). Nessa parte do estudo foi acompanhada a

quantidade de deslocamento angular que ocorreu da haste externa em torno do seu eixo de rotação, ou seja, a extremidade da haste central. De tempos em tempos ocorria uma inversão do sentido de rotação da haste externa, do sentido horário para sentido anti-horário ou vice-versa. Para saber quando ocorreram as inversões foram analisados os dados e os gráficos gerados no Inventor que, importados no Microsoft Excel, possibilitaram a realização das análises utilizando fórmulas do Excel. Sabendo os instantes que ocorriam as inversões do sentido de rotação, foi possível determinar a quantidade de voltas que houveram no período entre uma e outra inversão de rotação. Dessa forma, foi possível realizar o cálculo do deslocamento angular da haste externa no período entre uma e outra inversão, até o tempo máximo de análise que era de 120 s. Essa última análise foi realizada para os ângulos de 0°, 15° e 30°, pois nos ângulos -15° e -30°, devido a menor energia potencial inicial do sistema, não foi observado o movimento de rotação completa na haste externa.

As hastes foram consideradas como feitas de material acrílico. Com este material, estimou-se que a massa da haste central seria de 72 g e da haste externa de 57 g. Não foi utilizado qualquer tipo de torque ou força de atrito, o que seria comum em uma situação real. A análise ocorreu durante 120 s para cada um dos ângulos de partida, com 6000 passos de tempo, ou seja, cada passo com 0,02 s. Isso possibilitou a visualização e análise do movimento sem lacunas significativas dos deslocamentos e com boa aproximação a uma condição real.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados podem ser separados em duas etapas:

- a primeira é a análise dos AMED atingidos pela haste central para cada um dos ângulos; e
- a segunda é a determinação do número de rotações completas realizadas pela a haste externa em torno do seu eixo.

Portanto, na análise dos AMED para cada uma das inclinações de partida, foi possível encontrar os valores descritos na Tabela 1.

Tabela 1 – AMED para diferentes ângulos de partida.

Inclinação <sup>a</sup>	Tempo de ocorrência dos AMED (s)		Ângulos máximos <sup>b</sup>	
	Esquerda	Direita	Esquerda	Direita
-30°	0	119,18	60,0°	60,0°
-15°	118,06	35,82	78,3°	78,2°
0°	97,72	86,92	103,3°	100,7°
15°	57,48	83,42	124,8°	125,6°
30°	73,92	71,42	152,4°	153,3°

<sup>a</sup> com relação à horizontal no sentido positivo

<sup>b</sup> com relação à vertical no sentido negativo

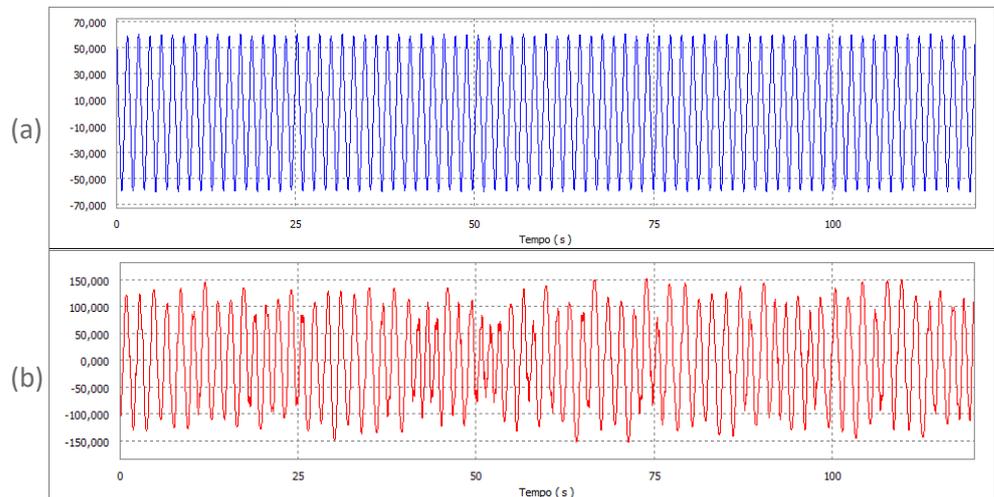
Fonte: Autoria própria (2020).

Para os ângulos estudados e com base na Tabela 1, é possível afirmar que no lançamento a  $-30^\circ$ , o movimento do pêndulo duplo se manteve bastante simétrico, sem superar AMED de  $60^\circ$ , que é exatamente o limite do lançamento a  $-30^\circ$ .

No entanto, para todos os outros ângulos de lançamento analisados, houve acréscimo ao limite do lançamento, ou seja, para o ângulo de  $-15^\circ$ , cujo limite de lançamento era de  $75^\circ$ , marca ultrapassada em  $3,3^\circ$ . Para o ângulo de lançamento de  $0^\circ$ , o limite foi rompido em  $13,3^\circ$ . Para os ângulos de  $15^\circ$  e  $30^\circ$ , os limites foram excedidos em  $20,6^\circ$  e  $33,3^\circ$ , respectivamente. Estes valores demonstram uma forte relação entre a inclinação de lançamento e a altura máxima alcançada pela haste central do pêndulo duplo.

Na Figura 3 são apresentados os gráficos dos AMED, onde é nítida a variação que ocorre no alcance máximo em função do tempo para diferentes inclinações de lançamento.

Figura 3 – Ângulos máximos à esquerda (positivos) e à direita (negativos): (a) para lançamento a  $-30^\circ$  e (b) para lançamento a  $30^\circ$ .



Fonte: Autoria própria (2020).

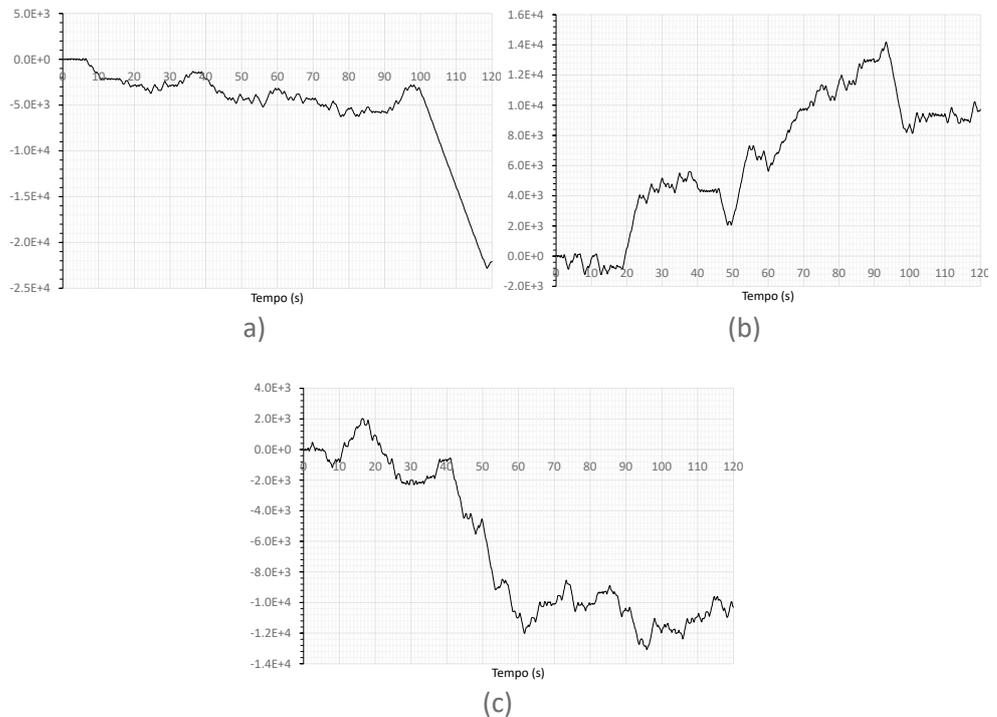
Na segunda etapa, foram determinados o número de rotações completas realizadas pela haste externa em função da inclinação de lançamento. Cabe ressaltar que essa análise não foi realizada para os ângulos  $-30^\circ$  e de  $-15^\circ$  devido a estes não permitirem a formação de nenhuma rotação completa. Logo, para os ângulos de  $0^\circ$ ,  $15^\circ$  e  $30^\circ$ , foram realizadas 132, 137 e 124 rotações completas pela haste externa em torno do seu eixo de rotação. Estes valores não permitem uma determinar a existência de uma relação entre a inclinação de lançamento e o número de voltas completas ocorridas.

Os gráficos da Figura 4 apresentam o comportamento do deslocamento angular para as inclinações de lançamento em  $0^\circ$ ,  $15^\circ$  e  $30^\circ$ . Analisando as imagens, não é possível determinar quaisquer relações entre os deslocamentos ocorridos e os ângulos de lançamento. Isso demonstra a dificuldade de se determinar a posições de sistemas caóticos como é o caso do pêndulo duplo estudado.

Para trabalhos futuros, sugere-se a análise de um maior número de ângulos de lançamento, assim como o desenvolvimento de um algoritmo para otimizar as análises de quando ocorrem as inversões do movimento e também a contagem do

número de rotações completas realizadas para um determinado ângulo de lançamento. Análises experimentais já estão previstas com o uso de um pêndulo duplo, onde os movimentos reais serão comparados com os simulados.

Figura 4 – Deslocamento angular da haste externa no tempo. No sentido (+) a rotação é anti-horária e no (-) é horária (Eixo das ordenadas em graus): (a) 0°, (b) 15° e (c) 30°



Fonte: Autoria própria (2020).

## CONCLUSÃO

Durante a realização das etapas do estudo realizado sobre o comportamento da haste central e haste externa do pêndulo duplo, verificou-se que, na primeira parte do estudo, onde foram analisados os AMED, foi possível averiguar que quanto maior o ângulo de inclinação inicial, maior será o AMED. Na segunda parte do estudo, pode se afirmar que quando o pêndulo duplo foi liberado de um ângulo maior ou igual a 0°, a haste externa realizou voltas completas em torno do eixo de rotação em algum momento da simulação.

Com os resultados obtidos é possível analisar o movimento caótico, para entender, por exemplo, como cargas suspensas se comportam nessa situação, mostrando que ocorre inversão de rotação da carga suspensa, contribuindo com desenvolvimento de equipamentos que possam prevenir o movimento caótico de forma mecânica.

## REFERÊNCIAS

AKERLOF, C. W. **The Chaotic Motion of a Double Pendulum**. University of Michigan, 2012.

KAPITSA, P. L. Dynamic stability of a pendulum with an oscillating point of suspension. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**. v. 21, n. 5, p. 588–597. 1951

LANDAU, L. D.; LIFSHITS, E. M. **Mechanics**. Pergamon Press: New York, 1976.

LOWENSTERN, E. R. The stabilizing effect of imposed oscillations of high frequency on a dynamic system. **Philosophical Magazine and Journal of Science**. v. 8, p. 458–486, 1932

NIKOLAI, B.; GABIN, A. M.; JIMENEZ, R. Z. Double Pendulum Induced Stability. **International Journal Of Applied Mechanics**, v. 07, n. 06, p. 1-15, 2015.

SHINBROT, T. GREBOGI, C. WISDOM, J. YORKE, J. Chaos in a double pendulum. **American Journal of Physics**, v. 60, 1992.

STACHOWIAK, T.; OKADA, T. A numerical analysis of chaos in the double pendulum. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 29, n. 2, p. 417-422, 2006.

STEPHENSON, A. On induced stability. **Philosophical Magazine and Journal of Science**. v. 15, n. 6, p. 233–236, 1908.

\_\_\_\_\_. On induced stability. **Philosophical Magazine and Journal of Science**. v. 17, p. 765–766, 1909.