



Aplicação de controladores robustos projetados via LMI's em modelos matemáticos de sistemas dinâmicos

Application of robust controllers designed via LMI's in mathematical models of dynamic systems

Luís Felipe de Paula Miranda (orientado) *, Emerson Ravazzi Pires da Silva (orientador) †

RESUMO

As técnicas de controle robusto vêm ganhando notoriedade nos últimos dez anos visto a possibilidade de incluir incertezas de modelagem na síntese dos controladores. O presente trabalho contempla a teoria de controle moderna e robusta, sintetizando um ganho de realimentação de estados que garanta a robustez a incertezas. O intuito é fazer com que o sistema siga uma referência preestabelecida. Para realizar a síntese do controlador será empregado o critério de estabilidade de Lyapunov, quem implica a utilização das desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*, LMI) e testado em um sistema dinâmico de sexta ordem o 3-DOF, *Degrees Of Freedom*. Objetiva-se recorrer aos critérios de projeto embasados nas normas \mathcal{H}_∞ . Para solucionar os conjuntos LMIs será utilizado o software MATLAB[®] que possui um alto poder de resolução numérica e permite, facilmente, simular o sistema de controle previamente a implementação.

Palavras-chave: Controle Robusto. 3-DOF *Degrees Of Freedom*. Norma \mathcal{H}_∞ .

ABSTRACT

Robust control techniques have gained notoriety in the last ten years due to the possibility of including modeling uncertainties in the synthesis of controllers. The present work contemplates the modern and robust control theory, synthesizing a state feedback gain that guarantees robustness to uncertainties. The intention is to make the system follow a pre-established reference. To perform the controller synthesis, the Lyapunov stability criterion will be used, which implies the use of linear matrix inequalities (LMI) and tested in a sixth-order dynamic system or 3-DOF, *Degrees Of Freedom*. The objective is to resort to design criteria based on \mathcal{H}_∞ standards. To solve the LMI sets, the software MATLAB[®] will be used, which has a high numerical resolution power and allows, easily, to simulate the control system prior to implementation.

Palavras-chave: Robust Control. 3-DOF *Degrees Of Freedom*. \mathcal{H}_∞ Norm.

1 INTRODUÇÃO

A utilização de técnicas de síntese de controlador linear robusto vem sendo notória nos últimos anos (KHALED; BOUKHETALA; BOUDJEMA, 2011). Aplicações de controladores robustos são relatados na literatura especializada por muitos livros devido ao seus resultados relevantes e satisfatórios, por exemplo, vide (DORF; BISHOP, 2017, cap. 12) e (OGATA, 2010, cap. 10).

Baseado no pressuposto que os modelos usados para o projeto de controle tenha erros de modelagem intrínsecos, a teoria de controle robusto busca incorporar estes erros de modelagem na sintetização dos

*  Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, PR, Brasil;
 lfeliphemiranda@gmail.com.

†  Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio;  emersonr@utfpr.edu.br.



controladores (OGATA, 2010). Posto isso, é visível a importância da teoria de controle robusto na atualidade, sendo observado a aplicação em diferentes classes de sistemas dinâmicos, como no projeto de controladores para aeronaves, servossistemas, sistemas elétricos de potência, entre outros.

Na teoria de controle robusto, um método muito utilizado para análise de estabilidade de sistemas dinâmicos é o critério de estabilidade de Lyapunov. Este critério pode ser aplicado a quase todos os sistemas existentes, tal como: sistemas não-lineares, sistemas variantes ou invariantes no tempo e também nos essenciais sistemas lineares (BOYD et al., 1994).

Segundo Boyd et al. (1994), o critério de estabilidade de Lyapunov viabiliza o estudo da estabilidade de um sistema dinâmico com base nas desigualdades matriciais lineares (do inglês - *Linear Matrix Inequalities*, LMI), verificando as equações de Lyapunov, caso o sistema dinâmico seja estável, as equações serão factíveis de se resolver. Com o advento das técnicas de controle robusto, algoritmos capazes de trazer a solução das LMI's foram criados, na maioria dos casos trata-se de problemas com múltiplos critérios, como visto no trabalho de Wu, Cao e Li (2009).

Neste trabalho, o enfoque está na sintonia de ganhos robustos que faça com que o sistema siga um conjunto de referências preestabelecidas de modo a garantir a máxima robustez às falhas nos atuadores. Será que aplicando a norma \mathcal{H}_∞ como ferramental para a construção das LMI's robustas de síntese será possível estabilizar o sistema?

2 MÉTODO

O presente trabalho tem a finalidade de controlar de forma robusta um sistema dinâmico que tem entrada as tensões elétricas nos motores e possíveis saídas as posições angulares dos eixos, tratando-se de um sistema de múltiplas entrada e múltiplas saídas (do inglês *Multiple-Input Multiple-Output*, MIMO). Posto isso, neste capítulo serão apresentados algumas recursos matemáticas e conceitos de sistemas para auxiliar na interpretação e construção dos dados.

2.1 Sistema de 3 graus de liberdade (3-DOF, *Degrees Of Freedom*)

O sistema que será controlado, via modelagem matemática, através de uma síntese de controlador robusto pode ser visto na Figura 1. Trata-se do sistema 3-DOF *Hover* fabricado pela Quanser[®] Inc., que consiste em uma estrutura redonda plana com quatro hélices. A estrutura é montada em uma junta de articulação de três graus de liberdade que permite que o corpo gire em torno dos eixos de rotação, inclinação e guinada. As hélices são acionadas por quatro motores CC montados nos vértices da estrutura (QUANSER, 2005).



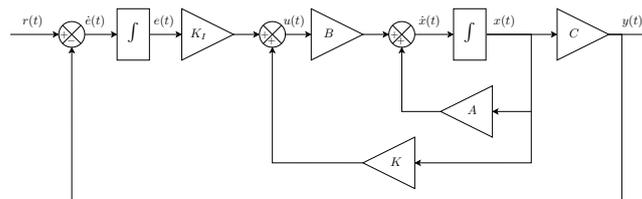
Figura 1 – Modelo físico do Quanser[®] 3-DOF Hover

Fonte – Quanser[®] 3 DOF Hover Experiment for MATLAB[®]/Simulink[®] Users.

2.2 Controle Integral: projeto de servossistema

Conforme relatado em Ogata (2010), caso a planta não tenha naturalmente um integrador (planta do tipo 0), o princípio básico do projeto de um servossistema do tipo 1 será inserir um integrador no ramo direto entre o comparador de erro, $e(t)$, e a planta (A, B, C), como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Diagrama de blocos do controle integral.



Fonte – Adaptado de (OGATA, 2010).

A representação no espaço de estados para um sistema onde há um aumento de ordem pela inclusão do polo do integrador é dado por (1).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t), \quad y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

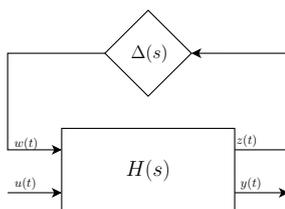
sendo \bar{A} , \bar{B} e \bar{C} as matrizes aumentadas. Com esta configuração de projeto se faz possível garantir que o sistema seguirá um conjunto de referências.

2.3 Incerteza não estruturada

Segundo França, Dupont e Pinheiro (2020) incerteza não estruturada é definida como o não conhecimento do comportamento da fase e do ganho da planta em frequências de determinada faixa de operação, que por sua vez é causada por polos e zeros não modelados, ou seja, dinâmicas não modeladas. O diagrama de blocos, representado pela Figura 3a, mostra como a incerteza afeta um dado sistema. A Figura 3b mostra um tipo de incerteza ocasionada por falha no sinal de controle.

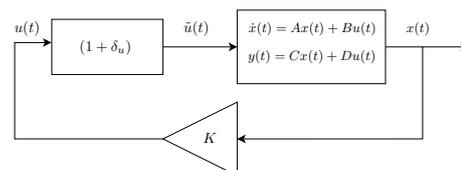
Figura 3 – Interferência da incerteza não estruturada.

(a) Diagrama de blocos que representa a presença das incertezas não estruturadas.



Fonte Adaptado de (OGATA, 2010).

(b) Relação na qual o sinal de controle ruidoso interfere no sistema.



Fonte Autoria Própria (2021).

sendo que $\Delta(s)$ define como as incertezas se comportam de acordo com a saída do sistema e $H(s)$ é o sistema

em malha aberta, definido pela Equação 2.

$$x(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t), \quad y(t) = Cx(t) + D_u u(t) + D_w w(t), \quad z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \quad (2)$$

Seja $H(s)$ um sistema com estabilidade interna, e seja $H_{wz}(s)$ a função de transferência entre a entrada, $w(t)$, e a saída, $z(t)$. Então, o sistema mostrado na Figura 3a é internamente estável para todo $\Delta(s)$ que satisfaça uma das condições da norma \mathcal{H}_∞ .

2.4 Norma \mathcal{H}_∞

A norma \mathcal{H}_∞ pode ser descrita pela função de Lyapunov, portanto, $\|H_{wz}(s)\|_\infty \leq \gamma$ se existir $P = P' > 0$ que satisfaça a LMI.

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'_z C_z & PB_w + C'_z D_{zw} \\ B'_w P + D'_{zw} C_z & D'_{zw} D_{zw} - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \iff \begin{bmatrix} A'P + PA & PB_w \\ B'_w P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C'_z \\ D'_{zw} \end{bmatrix} (-I) \begin{bmatrix} C_z & D_{zw} \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

Segundo Boyd et al. (1994), pode-se utilizar o complemento de Schur para obter a condição (4). Como $\|H_{wz}(s)\| < \gamma$, se o *Bounded Real Lemma* (4) for satisfeito, então a norma \mathcal{H}_∞ pode ser calculada usando um procedimento de otimização. Definindo $\mu = \gamma^2$ e resolvendo:

$$\text{sujeito a } \begin{matrix} \min_{P=P'>0} \mu \\ \begin{bmatrix} A'P + PA & PB_w & C'_z \\ B'_w P & -\mu I & D'_{zw} \\ C_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0 \end{matrix} \quad (4)$$

Considerando um sistema em malha-fechada, o sinal de controle é dado por $u(t) = Kx(t)$, resultando em (5).

$$\dot{x} = (A + BK)x(t) + B_w w(t), \quad z = (C_z + D_{zu}K)x(t) + D_{zw} w(t) \quad (5)$$

Definindo $A_{mf} = A + BK$ e $C_{mf} = C_z + D_{zu}K$, tem-se que a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha-fechada é tal que $\|H_{mf}(s)\|_\infty \leq \gamma$ se, e somente se, existir $P = P' > 0$ e aplicando uma série de transformações de congruência, a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha-fechada, com o ganho de realimentação de estados $u(t) = Kx(t)$, é tal que $\|H_{mf}(s)\|_\infty \leq \gamma$ se, e somente se, existirem $P = P' > 0$ e Z satisfazendo a LMI (6):

$$\begin{bmatrix} AP + PA' + BZ + Z'B' & PC'_z + Z'D'_{zu} & B_w \\ C_z P + D_{zu}Z & -\gamma^2 I & D_{zw} \\ B'_w & D'_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

sendo $K = ZP^{-1}$ o ganho robusto de realimentação de estados.

- **Demonstração:** Para mais detalhes vide (BOYD et al., 1994).

Existem alguns casos no qual o sinal de controle acaba inserindo um ruído na entrada do atuador onde, de certa forma, o ruído é proporcional a algum dos estados mensurados. No caso do presente trabalho, a atenuação do ruído é dado em todos os estados do vetor de saída.

A Figura 3b mostra a relação entre o sinal de controle real e o sinal de controle antes da atenuação.

Seja a atenuação do sinal de controle dada por:

$$\tilde{u} = (1 + \delta_u) u(t) \quad (7)$$

Neste caso, pode-se fazer $\Delta = \delta_u$, com $\|\Delta\| \leq \max \delta_u$, obtendo a Equação 8.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(1 + \delta_u)u(t) \iff Ax(t) + Bu(t) + B\delta_u u(t) \quad (8)$$

Note que há a separação da parte nominal e a parte incerta, onde $w(t)$ diz respeito a como as incertezas interferem na dinâmica do sistema.

No caso $w(t) = \delta_u u(t)$, a incerteza está interferindo na dinâmica do sistema através do atuador. Como:

$$w(t) = \Delta z(t) \Rightarrow \Delta = \delta_u \quad (9)$$

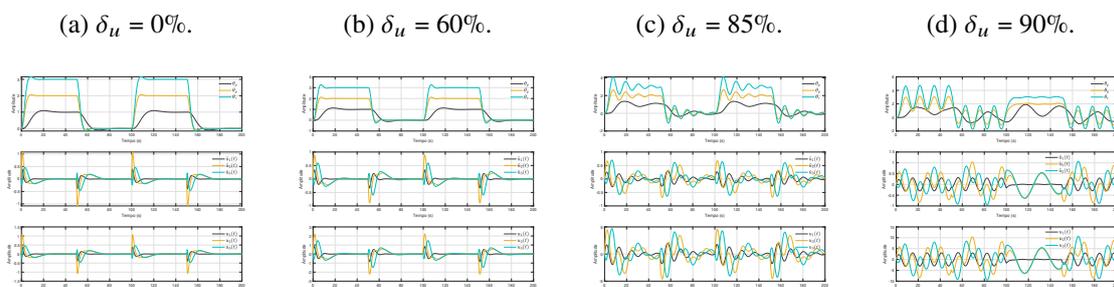
Logo, tem-se como resultado a modelagem da Equação 10 considerando que o sistema deva seguir uma referência, a estratégia do controle integral será usada, logo se faz necessário a utilização do sistema aumentado, como foi apresentado em (1) e estruturado abaixo:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x + \bar{B}u(t) + \bar{B}_w u(t), \quad y(t) = \bar{C}x(t), \quad z(t) = \bar{C}_z x(t) + \bar{D}_{zu} u(t) + \bar{D}_{zw} w(t) \quad (10)$$

3 RESULTADOS

As Figuras a baixo mostram as respostas temporais do sistema, do sinal de controle real e do sinal de controle ideal.

Figura 4 – Resposta temporal do sistema, do sinal de controle real e do sinal de controle ideal.



Fonte – Autoria Própria (2021).

A análise das respostas transitórias controladas pela síntese robusta \mathcal{H}_∞ , para os diferentes casos de falha no atuador, é realizada a seguir.

4 CONCLUSÕES

O intuito do presente trabalho foi assegurar a robustez do sistema 3-DOF Hover, fabricado pela Quanser[®], considerando falhas nos atuadores de até 60%. Pode-se observar que o objetivo principal do projeto foi alcançado, pois analisando as respostas transitórias apresentadas nas Figuras 4a, sem falhas nos atuadores, e 4b, com falha



de 60%, é possível verificar que ambas possuem respostas temporais semelhantes, indicando a atuação do sistema robusto \mathcal{H}_∞ no quadricóptero.

Na Figura 4c, falha de 85% nos atuadores, percebe-se que o sistema perde desempenho como já esperado. Isso se deve pois a energia de pior caso foi calculada para falhas de até 60%, de qualquer forma, é possível averiguar que o sistema tende a seguir a referência preestabelecida, não com a intensidade de robustez dos transitórios anteriores, mas ainda com certa eficaz.

Diferentemente dos transitórios apresentados nas Figuras 4a, 4b e 4c, quando aplica-se uma falha nos atuadores de 90%, veja Figura 4d, bem acima dos 60% de requisito de projeto, o quadricóptero já não consegue mais seguir as referências estipuladas e tem perda de robustez, o que já era esperado. Isso acontece pois o ganho robusto de realimentação de estados obtido via LMIs não contempla uma falha de até 90%, caso necessário, seria até possível projetar um ganho para tal faixa, embora não seja praticamente executável, visto que para uma porcentagem muito alta de falha os ganhos do controlador tendem a serem muito grandes também e isso inviabiliza uma possível implementação na prática. Em um ambiente de simulação poderia ser factível.

Por fim, este trabalho tratou de simulações baseadas no modelo matemático em espaço de estados e é esperado que para faixas de até 60% de falha nos atuadores o controlador robusto \mathcal{H}_∞ atue perfeitamente. Para faixas superiores a 60% a robustez não é garantida, em ambiente virtual conta-se com componentes ideais, no entanto, na prática existem sinais de ruídos que podem interferir nas medições, por exemplo. Posto isso, para os próximos trabalhos, pode-se aplicar o controlador sintetizado no módulo Quanser[®] 3-DOF Hover real, ou em algum módulo didático com características semelhantes. Também é possível utilizar um controlador do tipo misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para melhorar o sinal de controle garantindo desempenho superior.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Fundação Araucária FA - Paraná/Brasil. Os autores agradecem à Fundação Araucária pela bolsa concedida ao acadêmico Luís Felipe de Paula Miranda.

REFERÊNCIAS

- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. [S.l.]: SIAM studies in applied mathematics: 15, 1994.
- DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. **Modern Control Systems**. 13th. USA: Pearson, 2017. cap. 12. ISBN 978-1292152974.
- FRANÇA, Rodrigo Paz; DUPONT, Fabricio Hoff; PINHEIRO, José Renes. **Uma Abordagem Robusta para Estabilidade de Sistemas Formados por Conversores Estáticos Interconectados**. 2020. Disponível em: [🔗](#).
- KHALED, Halbaoui; BOUKHETALA, Djamel; BOUDJEMA, Fares. Introduction to Robust Control Techniques. In: [s.l.: s.n.], abr. 2011. ISBN 978-953-307-229-6. DOI: [10.5772/15213](#).
- OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. cap. 10. ISBN 978-85-4301-375-6.
- WU, Baolin; CAO, Xibin; LI, Zhengxue. Multi-objective output-feedback control for microsatellite attitude control: An LMI approach. **Acta Astronautica - ACTA ASTRONAUT**, v. 64, p. 1021–1031, jun. 2009. DOI: [10.1016/j.actaastro.2008.12.012](#).