



SEI-SICITE 2021

Pesquisa e Extensão para um mundo em transformação

XI Seminário de Extensão e Inovação  
XXVI Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica  
08 a 12 de Novembro - Guarapuava/PR



# Desenvolvimento e controle de um módulo didático pêndulo de Furuta

## *Development and control of a Furuta's pendulum didactic module*

Felipe Makoto Imanishi (orientado) \*, Emerson Ravazzi Pires da Silva (orientador) †

### RESUMO

É evidenciado que o ensino profissionalizante atual apresenta escassez de recursos para o aprendizado de conceitos práticos em diversas áreas da engenharia. Parte dos motivos desse problema se dá pelo alto custo dos equipamentos e módulos didáticos disponíveis no mercado, se tornando inacessível para a maioria das instituições e, principalmente, para os estudantes. Diante deste cenário, este trabalho propõe o desenvolvimento e controle de um módulo didático pêndulo invertido rotacional, ou também conhecido como pêndulo de Furuta. Este módulo apresenta uma variedade de conceitos profissionalizantes e teóricos agregados, sendo um módulo ideal para aprendizado na área de controle e automação. Será então implementado no módulo didático desenvolvido a sintonia de um controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) por meio de método empírico. Como também, será equacionado a modelagem matemática do sistema levando em consideração os parâmetros intrínsecos do módulo construído. Os resultados serão analisados a partir dos dados experimentais e as principais conclusões serão discutidas.

**Palavras-chave:** Pêndulo Invertido Rotacional. Controle linear. Módulo Didático.

### ABSTRACT

It is evident that current vocational education has a shortage of resources to learn practical concepts in several areas of engineering. Part of the reasons for this problem is due to the high cost of equipment and didactic modules available on the market, making them inaccessible for most institutions and, especially, for students. Given this scenario, this work proposes the development and control of a didactic module rotary inverted pendulum, or also known as Furuta's pendulum. This module presents a variety of professionalizing and theoretical concepts added, making it an ideal module for learning in the field of control and automation. It will then be implemented in the didactic module developed a Proportional Integral Derivative (PID) controller through an empirical method. As well, the mathematical modeling of the system will be equated, taking into account the intrinsic parameters of the built module. The results will be analyzed from the experimental data and the main conclusions will be discussed.

**Keywords:** Rotary Inverted Pendulum. Linear Control. Didactic Module.

## 1 INTRODUÇÃO

A extensa aplicação de métodos e teoria de controle automático em processos é alvo atual com foco no mercado, como também em pesquisa. Diante dos diversos desafios, sistemas automatizados são implementados em função de sua contribuição na redução de despesas de produção, eficácia e disponibilizando maior qualidade e agilidade nos processos (VASCONCELLOS; GARCIA, 2012).

\*  Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil;  felipeimanishi@alunos.utfpr.edu.br.

†  Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil;  emersonr@utfpr.edu.br.

No emprego de sistemas de controle nos casos em que o projeto necessite que requerimentos sejam atendidos de forma rigorosa, se torna imprescindível o estudo do projeto e de estratégias de controle apropriados. Neste intuito, dentre os diversos sistemas para o estudo de controle dinâmico, o pêndulo invertido é um dos mais populares experimentos para a introdução de conceitos de controle. Propondo à nova geração de estudantes de controle uma forma de verificação de técnicas convencionais, assim como de validação de novas ferramentas e métodos (BOUBAKER, 2012).

O pêndulo invertido rotacional, também conhecido como Pêndulo de Furuta, é um exemplo clássico da engenharia no ensino da teoria de controle, sendo possível aplicações de diversas técnicas. Apesar da simplicidade física do sistema, as implicações físicas tornam o estudo de seu sistema dinâmico mais complexas, principalmente por ser um sistema não-linear e de natureza instável, demonstrando o comportamento de diversos sistemas reais (BAITI et al., 2019). A título de exemplo, o comportamento oscilante da haste reproduz problemas oscilatórios de sistemas instáveis, frequentes em situações como no controle da trajetória de um projétil, movimento de um satélite e mesmo, dentro de determinados condicionantes, a postura humana (OLIVEIRA et al., 2005).

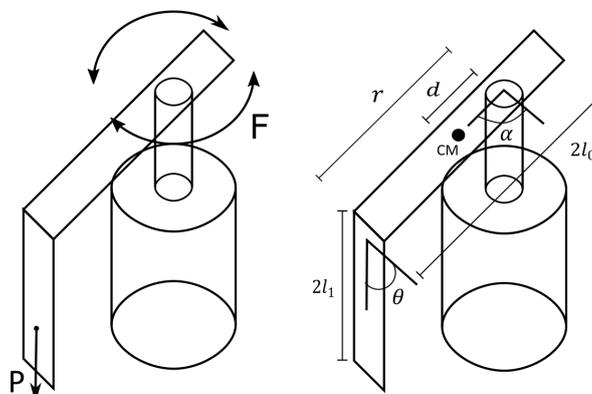
Neste trabalho é proposto construir um módulo didático pêndulo invertido (Pêndulo de Furuta); realizar a comunicação entre o módulo e o software Matlab<sup>®</sup>/Simulink<sup>®</sup>; e aplicar na prática um controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) e analisar as respostas transitórias controladas.

## 2 MÉTODO

### 2.1 Modelagem

O pêndulo invertido rotacional, veja Figura 1, ou pêndulo de Furuta, tem como diferencial uma ação sub-atuada no pêndulo, tal que este se encontra ligado a um braço que rotaciona em torno de um eixo. O atuador do sistema, um motor, é então posicionado neste eixo e o monitoramento das posições angulares é feito por meio de sensores. A atuação do sistema de controle é realizada no deslocamento angular deste eixo ( $\alpha$ ) e no deslocamento resultante no eixo de ligamento entre o braço e o pêndulo ( $\theta$ ). Assim, esse sistema tem como características: ser um sistema sub-atuado e fortemente não-linear devido a forças externas (IQBAL et al., 2017)

Figura 1 – Esquemático da dinâmica do pêndulo invertido rotacional



Fonte: Autoria própria (2021).

Pela Figura 1,  $\theta$  e  $\alpha$  são a posição angular do pêndulo e da haste horizontal, respectivamente;  $P_0$  é a componente de força peso gravitacional da haste horizontal, composta pelo produto da massa da haste  $m_0$  e



da aceleração gravitacional  $g$ ; da mesma forma,  $P_1$  é a componente de força peso do pêndulo, com  $m_1$  sendo a massa do pêndulo;  $F$  é a força rotacional exercida pelo motor; e as medições de referência  $r$ ,  $d$ ,  $2l_0$  e  $2l_1$  representando, respectivamente, comprimento do eixo ao pêndulo, comprimento do eixo ao centro de massa da haste horizontal, comprimento total da haste horizontal e comprimento total do pêndulo.

O modelo matemático derivado do sistema foi obtido por meio do estudo de corpo livre do sistema e dos parâmetros dispostos na Figura 1. A partir da Lagrangeana do sistema (ANGÉLICO et al., 2017), equação característica do sistema, equacionada através da diferença entre a soma das energias cinéticas das partículas do sistema ( $K$ ) e a soma das energias potenciais nas mesmas ( $P$ ), pode ser descrita pela Eq. (1).

$$L = K - P \quad (1)$$

Seguindo a modelagem, são obtidas as equações de Lagrange Eq. (2) e Eq. (3).

$$Q_0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = T \quad (2)$$

$$Q_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

Sendo que  $T$  representa o torque aplicado pelo motor na haste horizontal, onde o mesmo depende dos parâmetros do motor  $K_t$ ,  $K_e$ , da resistência  $R$  e do sinal de entrada  $PWM$  (ANGÉLICO et al., 2017), descrito na Eq. (4).

$$T = \frac{K_t}{R} (12PWM - K_e \dot{\theta}_0) \quad (4)$$

Devido a não-linearidade do sistema, obtida pela componente trigonométrica em seu modelo, é considerado, a fim de trabalhar com o sistema de forma linear, o comportamento linear do sistema em pequenos ângulos, considerando a aproximação  $\sin \theta \approx \theta$ .

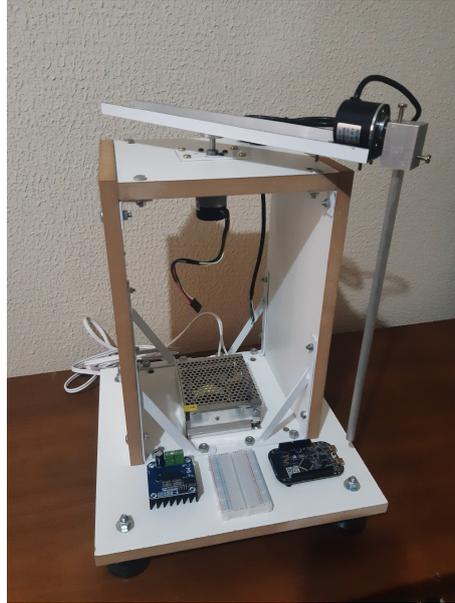
$$l_1 m_1 \sin(\theta) \dot{\theta}^2 r + \ddot{\alpha} m_0 d^2 + \frac{\ddot{\alpha} m_0 l_0^2}{3} + \ddot{\alpha} m_1 r^2 - \ddot{\theta} l_1 m_1 \cos(\theta) r = \frac{K_t}{R} (12PWM - K_e \dot{\theta}_0) \quad (5)$$

$$\frac{4\ddot{\theta} l_1^2 m_1}{3} - m_1 l_1 g \sin(\theta) - \ddot{\alpha} m_1 l_1 r \cos(\theta) = 0 \quad (6)$$

### 3 RESULTADOS

Com base no valor dos parâmetros do Quadro 1, referentes ao módulo didático construído (Figura 2), é obtido a representação em espaço de estados realizando as devidas substituições. Desenvolvendo Eq. (5) e Eq. (6) obtém-se as matrizes do modelo em espaço de estados A e B.

**Figura 2 – Módulo Didático Pêndulo Invertido Rotacional construído**



Fonte: Autoria própria (2021).

**Quadro 1 – Parâmetros das componentes do módulo didático**

Constantes	Valor
$d$	0,02 m
$l_0$	0,15 m
$l_1$	0,15 m
$m_0$	227,6 g
$m_1$	152 g
$r$	0,17 m
$R$	3,6 $\Omega$
$K_t$	0,118
$K_e$	0,229

Fonte: Autoria própria (2021).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 65.6430 & -2.5917 & 0 \\ 0 & 104.8465 & -2.2029 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 135.8083 \\ 115.4370 \end{pmatrix} \quad (8)$$

A sintonia dos ganhos,  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ , do controlador PID foi efetuada de maneira empírica, partindo da realização de diversos testes simulados e práticos. Baseando-se nos efeitos independentes dos ganhos  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  (OGATA, 2010) e na resposta de malha-fechada do sistema, foi realizado a sintonia do PID para controlar o módulo didático construído. Os ganhos projetados podem ser vistos a seguir:

$$G_{pid} = K_p + \frac{K_i}{s} + K - ds = 10 + \frac{45}{s} + 30s \quad (9)$$

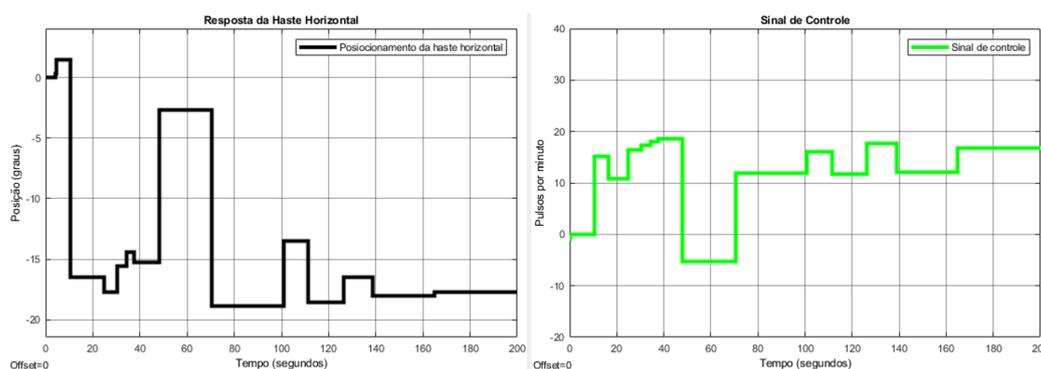
Por meio da sintonia do controlador PID empiricamente a partir de exaustivos ensaios computacionais e práticos por meio da comunicação entre o módulo e a ferramenta computacional Simulink®, obtendo assim os ganhos do controlador.

A ferramenta Simulink® disponibiliza uma interface interativa que permitiu de forma visual representar o sistema em forma de diagrama de blocos e executar procedimentos e tratamento dos dados por meio de blocos adicionais, como saturar o sinal de controle a ser enviado ao motor e programação do contador a partir dos dados obtidos pelos *encoders*.

A seguir são apresentados os gráficos com a resposta da haste horizontal e sinal de controle (Figura 3) e a resposta do pêndulo (Figura 4), respectivamente. Vale lembrar que neste trabalho não foi implementado o movimento *swing-up* do pêndulo, sendo necessário o posicionamento manual do pêndulo da posição vertical para baixo para a posição vertical para cima, assim iniciando a ação de controle. Outro aspecto não implementado é o controle da haste horizontal.

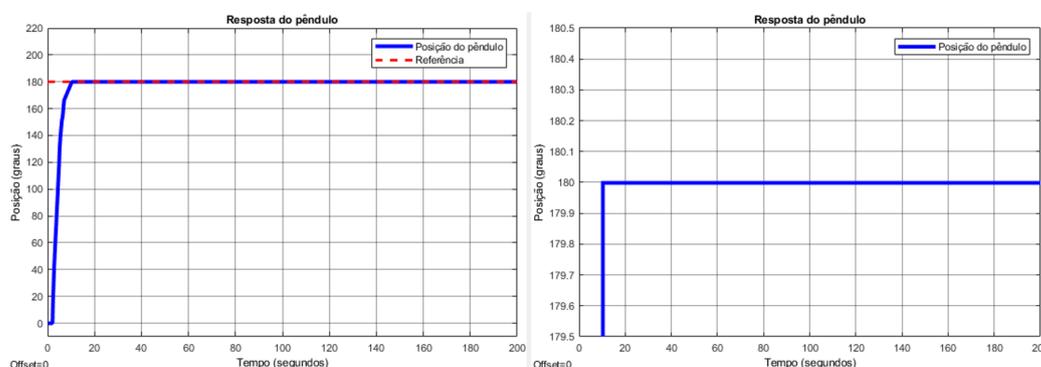
No ensaio foi aplicado manualmente dois distúrbios no módulo pêndulo de Furuta. Esses podem ser evidenciados na marca de 50 segundos e em 100 segundos, distinguíveis pelo pico de deslocamento da haste horizontal.

Figura 3 – Resposta da haste horizontal e Sinal de controle



Fonte: Autoria própria (2021).

Figura 4 – Resposta do pêndulo



Fonte: Autoria própria (2021).



## 4 CONCLUSÃO

No presente trabalho foi possível concluir o desenvolvimento do módulo didático pêndulo invertido rotacional e seu controle por meio de um controlador PID. A sintonia do controlador foi feita por meio de método empírico, apoiado em múltiplos ensaios computacionais e práticos, levando em consideração as reações intrínsecas aos respectivos parâmetros do controlador PID. Apesar de não ser o ideal, o método de sintonia empírica é muito utilizado no meio industrial devido à dificuldade na obtenção de modelos matemáticos de alguns sistemas mais complexos. De momento, não foi possível alcançar uma síntese satisfatória dos ganhos do PID exclusivamente por meio do modelo matemático obtido do sistema, porém, com o auxílio de ensaios práticos, através da investigação dos resultados alcançados, foi possível determinar os parâmetros do controlador PID gerando resultados satisfatórios para a finalidade do trabalho.

Em conclusão, o presente trabalho apresentou um módulo acessível, com desempenho satisfatório e funcional para o uso didático. Existem possibilidades de aprimoramento em relação a pontos não abordados, como a implementação de um controle de referência da haste horizontal. É também considerado para trabalhos futuros o desenvolvimento e aplicação de controladores que garantam maior robustez e velocidade de resposta, como controladores LQR e controle ótimo pela síntese de normas  $H_\infty$  e  $H_2$ .

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Tecnológica Federal do Paraná, pela participação do acadêmico Felipe Makoto Imanishi no Programa de Voluntariado em Iniciação Científica e Tecnológica - PIVICT 2020/2021.

## REFERÊNCIAS

- ANGÉLICO, B. A. et al. **Apostila do curso PTC3471: Práticas de Projeto de sistemas de controle**. 2017. ed. São Paulo: Escola Politécnica da USP, 2017.
- BAITI, A.A. et al. **The Design of Inverted Pendulums as Learning Sources of Adaptive Control**. Indonesia: [s.n.], 2019.
- BOUBAKER, O. **The Inverted Pendulum: A fundamental benchmark in control theory and robotics**. 1-3 Jul. 2012. Sousse, Tunisia: IEEE International Conference on Education and e-learning Innovations (ICEELI), 2012.
- IQBAL, Jamshed et al. **Non Linear Systems: A brief overview of historical and recent advances**. 4. ed. [S.l.]: Nonlinear Engineering, 2017.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2010.
- OLIVEIRA, Janaína G. et al. **Controle de um pêndulo invertido: Uma proposta para motivação de equipes discentes**. Campina Grande, PB: XXXIII - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 2005.
- VASCONCELLOS, Marcos A. S.; GARCIA, M.E. **Fundamentos de Economia**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.