# Resolução Tridimensional da Equação de Biotransferência de Calor Aplicado em Malhas Generalizadas

***Three-dimensional resolution of the Heat Biotransfer Equation Applied to Generalized Mesh***

Matheus Miranda Guimarães do Nascimento*, Gylles Ricardo Ströher†, Gisely Luzia Ströher‡.

**RESUMO**

O objetivo do presente trabalho é discretizar, verificar e aplicar a equação tridimensional em regime não permanente proposta por Pennes, também conhecida como equação de biotransferência de calor, em coordenadas generalizadas. A resolução desse modelo matemático foi obtida pelo método de volumes finitos em sua forma totalmente implícita com as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin. O sistema de equações lineares resultante foi resolvido pelo método de Gauss-Seidel. A verificação do algoritmo foi realizada por meio da comparação com soluções analíticas e com um *software* comercial. Ao comparar com a solução analítica o presente trabalho teve um comportamento conforme o esperado, permitindo a sua utilização em geometrias ortogonais com temperaturas constantes em sua fronteira. A comparação com o *software* comercial obteve respostas coerentes habilitando o algoritmo a ser utilizado em geometrias não ortogonais com fluxo constante e convecção em sua fronteira e com geração de calor. Quando aplicado o presente trabalho em uma tireoide com a presença de tumor observou-se que houve um leve aumento da temperatura na região com a presença de tumor, fato esse que indica a dificuldade de diagnóstico de câncer na tireoide com exames térmicos.

**Palavras-chave:** Pennes, Transferência de calor, Volumes Finito, Dirichlet, Neumann, Robin.

**ABSTRACT**

The main goal of this article is to discretize, verify and apply the Pennes' tridimensional diffusion heat equation, non-steady-state in generalized mesh. The solution of this mathematical model was obtained by using finite volume method in its fully implicit scheme with Dirichlet's, Neumann's and Robin's boundary conditions. The resulting equation was solved using Gauss-Siedel method. The algorithm's verification was set by comparing it to analytic solution and a commercial software. The analytic solution's comparison to the present work showed no great deviations allowing it to be used in orthogonal geometry with constant temperature in its boundary. The commercial app comparison obtained coherent answers that enables the algorithm to be used in non-orthogonal geometries with constant flux and convection in its boundary and with a heat's source. When applied the present work in a thyroid with a tumor, it was observed a slight temperature's increase in the region with tumor, this fact explains the difficulty of thyroid cancer diagnostic with thermic exams.

**Keywords:** Pennes, Heat transfer, Finite volumes, Dirichlet, Neumann, Robin.

## 1 INTRODUÇÃO

O modelo matemático proposto por Pennes (1948) é utilizado em sistemas biotérmicos para descrever a transferência de calor em tecidos biológicos. Como a geometria de diversos órgãos do corpo humano não pode ser facilmente descrita por coordenadas cartesianas, faz-se necessária a utilização de outros tipos de coordenadas espaciais, como as coordenadas generalizadas, que parametriza a geometria possibilitando o cálculo de volume e áreas do objeto (DELGADO, 2012).

Sendo assim, como é a distribuição de temperatura em uma tireoide humana com a presença de tumor? Neste contexto, o objetivo do presente trabalho é apresentar a resolução numérica da equação de Pennes em coordenadas generalizadas por meio do método de volumes finitos em sua forma totalmente implícito, utilizando para verificação soluções analíticas e um *software* comercial. Posteriormente, utilizou-se do algoritmo implementado para simular a transferência de calor em uma tireoide humana com a presença de tumor de formato elipsoidal.

## 2 MÉTODOS

A implementação do código e os resultados apresentados no presente trabalho foram obtidos com um notebook com processador Intel® Core™ i5, memória RAM de 8 GB, sistema operacional Windows 10 *Home Single Language* de 64 bits.

A equação da difusão de calor proposta por Pennes (1948) em coordenadas generalizadas é representada pela Eq. (1):

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\rho C p \mathrm{T}}{J}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(\alpha_{11}\frac{\partial T}{\partial \xi} + \alpha_{12}\frac{\partial T}{\partial \eta} + \alpha_{13}\frac{\partial T}{\partial \gamma}\right)kJ\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(\alpha_{21}\frac{\partial T}{\partial \xi} + \alpha_{22}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \eta} + \alpha_{23}\frac{\partial T}{\partial \gamma}\right)kJ\right] + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left[\left(\alpha_{31}\frac{\partial T}{\partial \xi} + \alpha_{32}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \eta} + \alpha_{33}\frac{\partial T}{\partial \gamma}\right)kJ\right] + \frac{\rho_b C p_b w_b (T_b - T)}{J} + \frac{\dot{Q}_m}{J} + \frac{\dot{Q}_{ext}}{J} \quad (1)$$

Em que: ρ é a massa específica, $kg.m^{-3}$; Cp é a capacidade calorífica a pressão constante, $J.kg^{-1}.°C^{-1}$; k é a condutividade térmica, $W.m^{-1}.°C^{-1}$; $\rho_b$ é a massa específica do sangue, $kg.m^{-3}$; $Cp_b$ é a capacidade calorífica a pressão constante do sangue, $J.kg^{-1}.°C^{-1}$; $w_b$ é a perfusão sanguínea, $s^{-1}$; $Q_m$ e $Q_{ext}$ são as fontes de calor metabólica e externa e ξ, η e γ são as novas coordenadas do sistema, J é o jacobiano representado pela Eq. (2) e os termos $\alpha_{ij}$ são coeficientes da equação descritos pelas Eq. (3) a (8).

$$J = \{x_\xi(y_\eta z_\gamma - y_\gamma z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi) + x_\gamma(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)\}^{-1} \quad (2)$$

$$\alpha_{11} = J^{-2}(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) \quad (3)$$

$$\alpha_{22} = J^{-2}(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) \quad (4)$$

$$\alpha_{33} = J^{-2}(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2) \quad (5)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = J^{-2}(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z) \quad (6)$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = J^{-2}(\xi_x \gamma_x + \xi_y \gamma_y + \xi_z \gamma_z) \quad (7)$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = J^{-2}(\eta_x \gamma_x + \eta_y \gamma_y + \eta_z \gamma_z) \quad (8)$$

Em que (x,y,z) e (ξ,η,γ) representam as coordenadas cartesianas e generalizadas, respectivamente, além de que $x_\xi$ representa a coordenada x derivada em função da coordenada ξ e assim para cada outra variável.

Para a resolução da equação de transferência de calor em malhas generalizadas tridimensionais, foi integrada a Eq. (1) e adotada a formulação totalmente implícita para o tempo, obtendo-se a Eq. (9).

$$A_p T_p = A_e T_E + A_W T_W + A_n T_N + A_s T_S + A_{ne} T_{NE} + A_{nw} T_{NW} + A_{sw} T_{SW} + A_{se} T_{SE} + A_f T_F + A_b T_B + A_{fw} T_{fw} + A_{fe} T_{fe} + A_{fn} T_{FN} + A_{fs} T_{FS} + A_{bw} T_{BW} + A_{be} T_{BE} + A_{bn} T_{BN} + A_{bs} T_{BS} + B \quad (9)$$

Em que cada subíndice indica em qual ponto cada termo está sendo calculado, devido ao limite de páginas optou-se por omitir os coeficientes da Eq. (9) estando eles descritos detalhadamente em Maliska (2017).

Para o cálculo de temperatura nas fronteiras, utilizou-se o método de volume fictícios. Assim, adotou-se os três tipos de condições de contorno, sendo elas: Dirichlet, Neumann e Robin. Para utilizar a condição de contorno de Dirichlet basta assumir um valor infinito para o coeficiente de transferência de calor por convecção (h). Sendo assim, a Eq. (10) fornece a equação do volume fictício para a fronteira leste.

$$\{q_e'' + h_e(T_w - T_\infty)\}\sqrt{\alpha_{11w}} = -k_w J_w\left(\alpha_{11}\frac{(T_P - T_W)}{\Delta\xi} + \alpha_{12}\frac{(T_N + T_{NW} - T_S - T_{SW})}{4\Delta\eta} + \alpha_{13}\frac{(T_F + T_{FW} - T_B - T_{BW})}{4\Delta\gamma}\right) \quad (10)$$

Em que $h_e$ representa o coeficiente de transferência de calor por convecção, W.m$^{-2}$.K; $T_{\infty e}$ na temperatura ambiente na região norte, K. Para $T_w$ utiliza-se a Eq. (11).

$$T_w = \frac{T_P - T_W}{2} \quad (11)$$

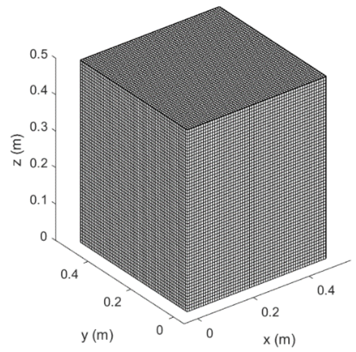
Para os volumes de vértices, adotou-se uma média simples. Além disso, uma possível verificação do algoritmo implementado pelos autores é a comparação com a solução analítica com temperaturas de fronteiras iguais a 0 °C e temperatura inicial de 20 °C com resfriamento durante 50 segundos. Sendo ela representada pela Eq. (12).

$$T(x,y,z,t) = \frac{8T_0}{\pi^3}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{(1+(-1)^{n+1})(1+(-1)^{m+1})(1+(-1)^{r+1})e^{-\alpha\pi^2 t\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{r\pi}{c}z\right)\right\}}{nmr} \quad (12)$$

## 3 RESULTADOS

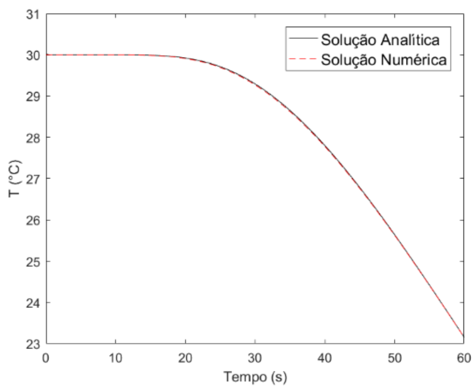
A verificação do algoritmo implementado no presente trabalho passa pela comparação com a solução analítica, tendo as condições de contorno de Dirichlet com todas as temperaturas em 0 °C, a temperatura inicial é igual a 30 °C. O tempo de resfriamento foi de 60 segundos com $\Delta\tau = 0.1$ s e as propriedades termodinâmicas adotadas foram: 20 W.m$^{-1}$.°C$^{-1}$, 200 kg.m$^{-3}$, 800 J.kg$^{-1}$.°C$^{-1}$ para a condutividade térmica, massa específica e capacidade calorífica, respectivamente. A Fig. (1) ilustra a malha utilizada na simulação e a Fig. (2) ilustra a comparação entre a solução analítica com o presente trabalho no ponto (0,2375, 0,2375, 0,2375).

**Figura 1 – Malha utilizada na simulação**




**Fonte: Autoria Própria (2021)**

**Figura 2 – Comparação da solução analítica com o presente trabalho**



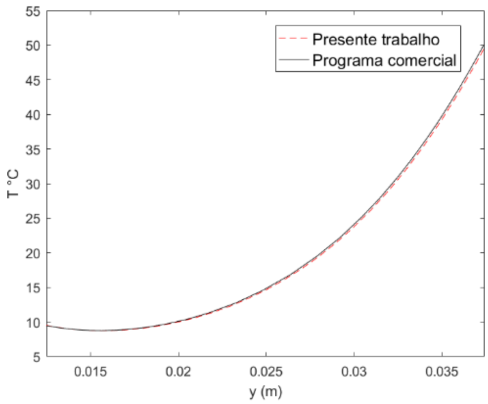

**Fonte: Autoria Própria (2021)**

A Fig. (2) ilustra que a simulação do presente trabalho concorda a solução analítica, permitindo, assim, a utilização dele em geometrias cartesianas com a condição de contorno de Dirichlet. Para verificar se o presente trabalho pode ser utilizado com geometrias não cartesianas, utilizou-se de outra geometria e comparou os resultados com um *software* comercial.

Assim, a geometria escolhida é similar a uma meia lua com dimensões de 0,0125 m <= raio <= 0,0375 m e com comprimento de 0.025 m. As propriedades termodinâmicas na simulação da transferência de calor são: 202,4 $W.m^{-1}.°C^{-1}$, 871 $J.kg^{-1}.°C^{-1}$, 2719 $kg.m^{-3}$ para a condutividade térmica, capacidade calorífica e massa específica, respectivamente.

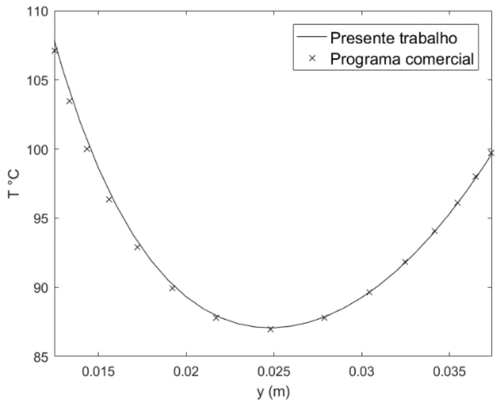
As condições de contorno utilizada na simulação da Fig. (3) foram de temperaturas iguais a 0 °C nas fronteiras norte, sul, frente e fundo. Para a fronteira leste foi adotado troca térmica por convecção com seu coeficiente ($h_e$) igual a 1.000 $W.m^{-2}.°C$ e temperatura do ambiente igual a 1.000 °C, já na fronteira oeste adotou-se um fluxo de calor constante igual a 100.000 $W.m^{-2}$. Para a Fig. (4), as condições de contornos adotadas foram temperatura constante nas fronteiras frente, fundo, norte e sul igual a 0 °C e com geração de calor igual a 200 $MW.m^{-3}$. Nas fronteiras leste e oeste adotou-se troca térmica por convecção com temperatura ambiente de 1000 °C e 500 °C, respectivamente, com coeficiente convectivo de 1000 $W.m^{-2}.°C^{-1}$. Assim, as Figs. (3) e (4) ilustram a comparação com o programa comercial no plano z igual a 0,0125, x igual a 0 e 0,0125 <= y <= 0,0375.

**Figura 3 – Comparação com o programa comercial para as condições de Neumann e Robin.**




**Fonte: Autoria Própria (2021)**

**Figura 4 – Comparação do presente trabalho com o programa comercial para geração de calor**



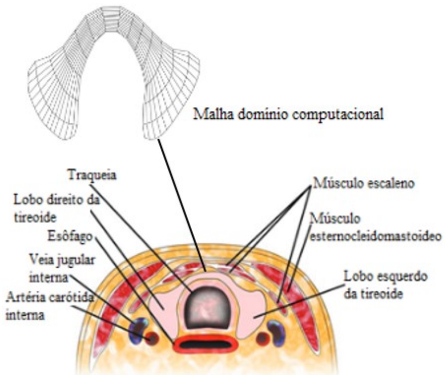

**Fonte: Autoria Própria (2021)**

De acordo com os resultados ilustrados nas Figs. (3) e (4) o presente trabalho pode ser utilizado com geometrias não ortogonais e com as condições de contorno de Neumann, Robin e com geração de calor. É necessário ressaltar que os resultados obtidos das Figs. (3) e (4) estavam em regime permanente, que para alcança-lo adicionou um tempo tendendo ao infinito. Assim, o algoritmo implementado teve resposta concordante ao esperado permitindo-o que seja utilizado com a geração térmica e com as condições de contorno dos três tipos.

Uma aplicação para o presente trabalho é um estudo de distribuição térmica em uma tireoide com a presença de tumor conforme feito por Nascimento *et al.*, (2020). No entanto, o trabalho apresentado nessa pesquisa estuda a distribuição térmica bidimensional. Assim, no presente trabalho buscou-se simular a transferência de calor em uma tireoide com geometria tridimensional.

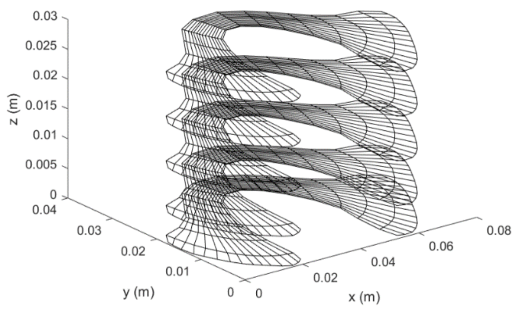
As Figs. (5) e (6) ilustram a representação física e geometria da tireoide que foi utilizada na simulação, respectivamente. As propriedades termodinâmicas da tireoide são: 3609 $J.kg^{-1}.°C^{-1}$, 1050 $kg.m^{-3}$ e 0,52 $W.m^{-1}.°C^{-1}$ para a capacidade calorífica, massa específica e condutividade térmica. Na região em que tem a presença do tumor, adotou-se uma massa específica, capacidade calorífica, perfusão sanguínea e temperatura do sangue iguais a 1050 $kg.m^{-3}$, 3617 $J.kg^{-1}.°C^{-1}$, 0,098 e 37 °C, respectivamente.

**Figura 5 – Representação física de um tireoide**




**Fonte: Arun *et al.* (2014) com adaptações**

**Figura 6 – Malha da tireoide utilizada na simulação no plano xyz**



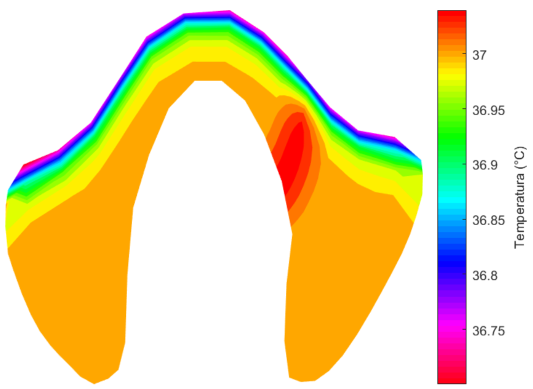

**Fonte: Autoria Própria (2021)**

Assim, de acordo com a metodologia adotada em Bittencourt (2017) considerou a temperatura inicial da tireoide a 0 °C com as fronteiras sul, leste, oeste, frente e fundo isoladas e apenas a fronteira norte exposta a convecção com um coeficiente convectivo igual a 10 $W.m^{-2}.°C^{-1}$ e temperatura ambiente igual a 25 °C. A geometria adotada para descrever a região do tumor foi a elipsoide descrita pela Eq. (13).

$$\frac{(x-0{,}0559)^2}{0{,}005^2}+\frac{(y-0{,}0231)^2}{0{,}005^2}+\frac{(z-0{,}015)^2}{0{,}01^2}=1 \quad (13)$$

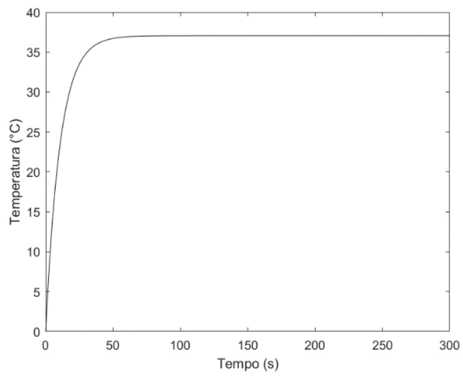
A geração de calor metabólica foi adotada em 4.200 $Wm^{-3}$ e na região dentro do tumor, adotou-se uma geração 10 vezes maior. Com isso, as Figs. (7) e (8) ilustram a distribuição térmica da tireoide no plano xy fixado a coordenada z em 17,5 mm e o comportamento térmico no centro da tireoide com o passar do tempo.

**Figura 7 – Distribuição térmica na tireoide no plano xy em z = 17,5 mm**




**Fonte: Autoria Própria (2021)**

**Figura 8 – Comportamento térmico no centro do tumor em 300 segundos**




**Fonte: Autoria Própria (2021)**

A Fig. (7) ilustra que a região onde há presença do tumor é levemente mais quente que a região sadia, embora ambas estejam na temperatura sanguínea. Já a Fig. (8) mostra que a temperatura se mantém constante em 37,05 °C, sendo essa a maior temperatura na tireoide, a sua temperatura média é de 36,98 °C, resultados que reforçam as recomendações de Gavriloaia, Ghemigian, and Hurduc (2009) e Herman (2013) que utilizaram sensores ultrassensíveis para o diagnóstico do câncer na fase inicial e mencionam que as melhorias na tecnologia de análise de dados e imagem tem trazido melhores soluções para esses casos com câmeras de sensitividade térmica de 0,02 °C.

## 4 CONCLUSÃO

O estudo de transferência de calor ocorre em diversos segmentos da ciência e um deles é o comportamento térmico em tecidos humanos, como proposto por Pennes (1948). Com isso, o presente trabalho teve como o objetivo verificar um algoritmo para aplicação dele com condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin e, após a verificação, aplica-lo em uma tireoide com a presença de um tumor. Portanto, a comparação com a solução analítica obteve uma resposta concordante habilitando o algoritmo para ser utilizado em geometrias ortogonais com a condição de contorno de Dirichlet. As condições de contorno de Neumann e Robin foram verificadas com a utilização de um *software* comercial cujo a comparação com o presente trabalho obteve respostas sem grandes desvios. Como a presença de tumor em uma tireoide gera calor, habilitou-se o presente trabalho com a geração de calor e ele também se comportou de acordo com o aplicativo comercial. Na aplicação do presente trabalho em uma tireoide pode-se observar que há um leve aumento da temperatura na região com a presença do tumor, fato esse que dificulta o diagnóstico, pois requer equipamentos térmicos sensíveis para a determinação de regiões tumorais.

**AGRADECIMENTOS**

Os autores do presente trabalho agradecem ao CNPq pela bolsa de iniciação científica concedida.

## REFERÊNCIAS

ARUN C. Nachiappan; Zeyad A. Metwalli; Brian S. Hailey; Rishi A. Patel; Mary L. Ostrowski; David M. Wynne. The Thyroid: Review of Imaging Features and Biopsy Techniques with Radiologic-Pathologic Correlation. **RadioGraphics**. v. 34. p. 276-293. 2014.

BITTENCOURT, Tiago Pereira da Costa. **Comparação entre o modelo de pennes e de duplo retardo para a biotransferência de calor na região ao redor da tireoide**. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

DELGADO João Manuel Paço Quesado; LIMA Antônio Gilson Barbosa; SILVA, Marta Vázquez. **Numerical analysis of heat and mass transfer in porous media**. Berlin: Springer, 2012.

GAVRILOAIA, Gheorghe; GHEMIGIAN, Adina Mariana; HURDUC, Anca. Early Cancer Diagnosis by Image Processing Sensors Measuring the Conductive or Radiative Heat. **IFMBE Proceedings**. v. 23, p. 427–430, 2009.

HERMAN, Cila. The role of dynamic infrared imaging in melanoma diagnosis. **Expert Rev Dermatol**. v. 8. p. 177-184. 2013. doi: 10.1586/edm.13.15

MALISKA, Clovis Raimundo. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

NASCIMENTO, Matheus Miranda Guimarães do; STRÖHER, Gylles Ricardo; STRÖHER, Gisely Luzia. Breve análise térmica bidimensional da tireoide humana na presença de tumor. **Geração de conhecimento nas ciências médias: impactos científicos e sociais**. Amplla. 2021. ISBN: 978-65-88332-20-7

PENNES, Harry. H. Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm. **Journal of Applied Physiology**. v. 1. p. 93-122. 1948