



SEI-SICITE 2021

Pesquisa e Extensão para um mundo em transformação

XI Seminário de Extensão e Inovação
XXVI Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica
08 a 12 de Novembro - Guarapuava/PR



Controle de um sistema torcional sujeito a variações paramétricas

Control of a torsional system subject to parametric variations

Fernando Costa Borzaga (orientado) *, Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari (orientador) †

RESUMO

O presente trabalho propõe o desenvolvimento de uma abordagem envolvendo técnicas e conceitos sobre controle robusto, desigualdades matriciais lineares (LMIs) e controladores de espaços de estados voltados para o controle do sistema Torcional-M205. Visto que os fundamentos de controle são utilizados para sínteses de controladores, esses tornam-se relevantes para simulação e aplicação em sistemas físico real. As teorias de controle clássico, controle moderno e controle robusto, são amplamente utilizadas para projetar controladores que satisfaçam restrições que sejam impostas ao sistema. Uma forma de representar o sistema físico real, além da função de transferência, é utilizando espaços de estados. Desse modo, a modelagem em espaços de estados originou-se através do controle moderno em uma representação no domínio do tempo e começou a ser empregada na década de 60. Além disso, essa modelagem pode diminuir a complexabilidade das expressões matemáticas, onde um sistema de equações em termos de n equações diferenciais de primeira ordem podem ser combinadas em uma equação diferencial vetorial-matricial de primeira ordem.

Palavras-chave: Controle Robusto. LMI. LPV. Torcional.

ABSTRACT

The present work proposes the development of an approach involving techniques and concepts on robust control, linear matrix inequalities (LMIs) and state space controllers aimed at controlling the Torcional-M205 system. Since the fundamentals of control are used for controller synthesis, these become relevant for simulation and application in real physical systems. The theories of classical control, modern control and robust control are widely used to design controllers that satisfy constraints that are imposed on the system. One way to represent the real physical system, in addition to the transfer function, is to use state spaces. Thus, state-space modeling originated through modern control in a time-domain representation and began to be used in the 1960s. equations in terms of n first-order differential equations can be combined into a first-order vector-matrix differential equation.

Keywords: Robust Control. LMI. LPV. Torsional.

1 INTRODUÇÃO

Uma forma de representar o sistema físico real, além da função de transferência, é utilizando espaços de estados. Desse modo, a modelagem em espaços de estados originou-se através do controle moderno em uma representação no domínio do tempo e começou a ser empregada na década de 60. Além disso, essa modelagem pode diminuir a complexabilidade das expressões matemáticas, onde um sistema de equações em termos de n equações diferenciais de primeira ordem podem ser combinadas em uma equação diferencial vetorial-matricial de primeira ordem (OGATA; SEVERO, 1998).

* DAELE, Engenharia de Controle e Automação; fernandoborzaga@alunos.utfpr.edu.br.

† DAELE, Engenharia de Controle e Automação; agulhari@utfpr.edu.br.

Com a metodologia atual é possível sintetizar um controlador capaz de estabilizar um sistema sujeito a variações paramétrica? Desse modo o controle robusto se refere a uma família de métodos que consideram parâmetros incertos e perturbações do sistema. Para aplicar tal teoria a literatura apresenta alguns métodos viáveis dando destaques aos sistemas dependentes de parâmetros variantes no tempo (LPV, do inglês Linear Parameter-Varying). Em tais técnicas a modelagem depende de parâmetros variantes no tempo, que são limitados por limitantes conhecidos.

De acordo com Briat (2015), um sistema LPV pode ser descrito por

$$\dot{x} = A(\alpha)x + E(\alpha)w; z = C(\alpha)x + F(\alpha); x(0) = x_0. \quad (1)$$

onde x , w e z referenciam respectivamente o estado, a entrada de ruídos e a saída controlada do sistema. Além disso o vetor de parâmetros α , variante no tempo, afeta o comportamento de entrada-saída. De acordo com Geromel e Colaneri (2006), um sistema incerto pode ser descrito como em 1, sendo $\alpha \in \Lambda_N$ uma representação paramétrica das incertezas do sistema, onde o conjunto Λ_N é caracterizado por simplex unitário, o mesmo é utilizado para representar politopos de N vértices, definidos por $\Lambda_N = \{\alpha \in \mathbb{R}^N : \alpha_i \geq 0, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1\}$ Alguns sistemas LPV possuem uma alta complexidade tanto em operações matriciais quanto recursos computacionais. Uma das maneiras mais utilizadas para lidar com sistemas LPV é a modelagem das condições de análise e síntese or meio de desigualdades matriciais lineares(LMI, do inglês Linear Matrix Inequality), que possibilita o tratamento simultâneo de vários requisitos de performance e robustez (BOYD, 1994).

2 MÉTODO

O presente trabalho propõe o desenvolvimento de uma abordagem envolvendo técnicas e conceitos sobre controle robusto, desigualdades matriciais lineares (LMIs) e controladores de espaços de estados voltados para o controle do sistema Torcional-M205 apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Torcional-M205.



Fonte: Torsional Control System.

O sistema foi recentemente adaptado para que massas possam ser adicionadas durante a execução do controle, causando um efeito de variação temporal na dinâmica do sistema.

2.1 Desigualdades Matriciais Lineares

Segundo Braga et al. (2014) as desigualdades matriciais lineares (LMIs) com os pacotes computacionais se tornaram uma importante ferramenta para soluções de problemas de controle. Com isso temos várias propriedades e teoremas visando a redução de problemas de otimização com as restrições LMIs, um dos teoremas



é o de Lyapunov. Seja $\dot{x} = f(x)$ um sistema autônomo tal que $f(0) = 0$ e seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo $x = 0$, a origem é estável se, e somente se existir uma função $V(x)$, contínua e diferenciável, chamada de função de Lyapunov, tal que $V(0) = 0$; $V(x) > 0$ em $D - (0)$; $\dot{V}(x) \leq 0$ em D . Ainda, se $\dot{V}(x) < 0$ em $D - (0)$, então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável (XIE; SHISHKIN; FU, 1997). Considere o sistema (1) com $w = 0$, se existir uma matriz de Lyapunov $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$ tal que

$$A'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0 \quad (2)$$

o sistema é considerado estável para todo intervalo de α , sendo assim um problema de dimensão infinita. Seja P uma matriz constante, $P(\alpha) = P$ logo a condição de Lyapunov é dada por

$$P > 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i (A'_i P + P A_i) < 0 \quad (3)$$

Uma maneira suficiente para verificar a segunda desigualdade em (3) consiste em garantir que os monômios são todos negativos. Dessa forma, tem-se

$$P > 0, \quad A'_i P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4)$$

Esta expressão corresponde a um conjunto de $N + 1$ condições LMIs.

2.2 Controlador de Realimentação de Estados

O controle por realimentação de estados de rastreamento, que tem o objetivo de fazer com que as saídas do sistema sigam uma referência desejada, que é a utilizada no trabalho presente. Considere o sistema (inicialmente sem dependência paramétrica) dado por

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = Kx \quad (5)$$

Para determinar K devemos garantir que $A + BK$ seja estável, portanto devemos satisfazer as seguintes condições

$$P > 0, \quad (A + BK)'P + P(A + BK) < 0 \quad (6)$$

Utilizando operações matemáticas temos

$$P > 0, \quad A'P + K'B'P + PA + PBK < 0 \quad (7)$$

Para eliminar o produto de variáveis em (7), que torna o problema não convexo, basta multiplicar esquerda e direita por P^{-1} , resultando em

$$P^{-1}(A'P + K'B'P + PA + PBK)P^{-1} < 0 \quad (8)$$

Operando a expressão, temos

$$P^{-1}A' + P^{-1}K'B' + AP^{-1} + BKP^{-1} < 0 \quad (9)$$

Fazendo as seguintes substituições $Z = KP^{-1}$, $Z' = P^{-1}K'$, $W = P^{-1}$ obtemos a expressão

$$W > 0, \quad AW + WA' + BZ + Z'B' < 0 \quad (10)$$

Para criar um controlador dependentes de parâmetros (α) na planta, devemos calcular um $K(\alpha)$ que estabiliza a dinâmica

$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (11)$$

Para isso devemos manipular as LMIs

$$W > 0, \quad A(\alpha)W + WA'(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha) + Z'(\alpha)B'(\alpha) < 0. \quad (12)$$



Como a planta é dependente de parâmetros, temos $A(\alpha) = \alpha_i A_i$, $B(\alpha) = \alpha_i B_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Esta expressão corresponde a $N+1$ conjunto de LMIs. Substituindo $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ e isolando α_i obtemos as seguintes LMIs

$$W > 0, \quad \alpha_i^2 (A_i W + W A_i' + B_i Z_i + Z_i' B_i') < 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (13)$$

$$\alpha_i \alpha_j (W A_i' + A_i W + W A_{i+1}' + A_{i+1} W + Z_j' B_{i+1}' + Z_{j+1}' B_i' + B_j Z_{j+1} + B_{i+1} Z_j) < 0 \quad (14)$$

Esta expressão corresponde a dois conjuntos $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$ e $j = i+1, 2, 3, \dots, N$. E por fim para obter o controlador $K(\alpha)$ aplica-se a expressão

$$K(\alpha) = Z(\alpha) W^{-1} \quad (15)$$

Com isso garantimos que o controlador de espaços de estados $K(\alpha)$ estabiliza o sistema.

3 RESULTADOS

A partir da metodologia apresentada foi controlado o sistema torcional, apresentado na Figura 1. Foi considerado que as massas possam variar de 0,5Kg até 5Kg. A simulação foi implementada no Matlab e as LMIs foram resolvidas usando os pacotes computacionais Yalmip (LÖFBERG, 2004) e Sedumi (STURM, 1999).

Considere o sistema em espaços de estados do Torcional-M205 por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y = Cx(t). \quad (16)$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1/J_1 & -c_1/J_1 & k_1/J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1/J_2 & 0 & -(k_1 + k_2)/J_2 & -c_2/J_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} cy_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cy_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cy_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cy_4 \end{bmatrix} \quad k_1 \text{ (Coeficiente elástico da barra entre os discos 1 e 2); } J_1 \text{ (Momento de Inércia do disco 1); } c_1 \text{ (Coeficiente de atrito viscoso disco 1); } k_2 \text{ (Coeficiente elástico da barra entre os discos 2 e 3); } J_2 \text{ (Momento de Inércia do disco 2); } c_2 \text{ (Coeficiente de atrito viscoso disco 2).}$$

Os parâmetros utilizados para a simulação proposta foram definidos a partir das dimensões do equipamento Torcional - M205 sendo eles $0,5 < m < 5Kg$; $r = 0,025m$; $h = 0,06m$; $J_1 = 0,001601627Kg.m^2$; $J_2 = 0,001952939954010Kg.m^2$; $J_{mi} = 0,0020Kg.m^2$; $J_{mf} = 0,0196Kg.m^2$; $J_{tmli} = 0,0036Kg.m^2$; $J_{tm1f} = 0,0196Kg.m^2$; $c_1 = 0,00518888699$; $c_2 = 0,00112147$; $k_1 = 2,68001097079$; $k_2 = 0$. Onde J_{tmli} e J_{tm1f} são o momento de inércia total inicial e final dos discos 1 e com a massa.

A simulação foi feita com duas massas variando, utilizando os discos 1 e 2 do Torcional e aplicando a referência rampa. Com base na formulação apresentada nas equações (13) e (14), são geradas as seguintes LMIs:

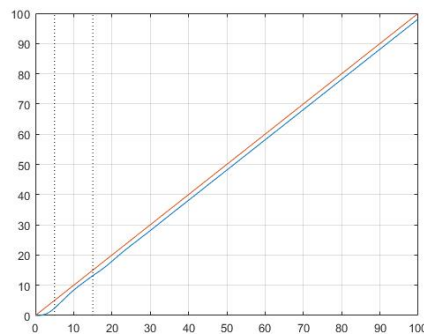
$$\begin{aligned} W' > 0; & W A_{tmli}' + A_{tmli} W + Z_1' B_{tmli}' + B_{tmli} Z_1 < 0; \\ W A_{tmli}' + A_{tmli} W + & W A_{tm1f}' + A_{tm1f} W + Z_1' B_{tm1f}' + Z_2' B_{tmli}' + B_{tmli} Z_2 + B_{tm1f} Z_1 < 0; \\ W A_{tm1f}' + A_{tm1f} W + & Z_2' B_{tm1f}' + B_{tm1f} Z_2 < 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Utilizando as LMIs (17) gerou-se o controlador $K(\alpha) = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2$, com



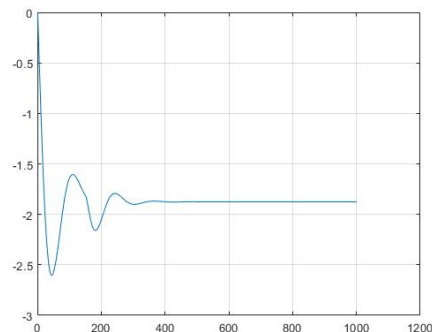
$K1 = \begin{bmatrix} 2.6605 & -0.0144 & -2.6685 & 0.0005 & 0.0046 \end{bmatrix}$ e
 $K2 = \begin{bmatrix} 2.6156 & -0.0417 & -2.6368 & 0.0012 & 0.0113 \end{bmatrix}$ que controlou e estabilizou o sistema com a referência constante e rampa. Após gerar $K1$ e $K2$, utilizando o comando ode45 no sistema em condições iniciais nulas obtemos os seguintes resultados. Para a referência rampa foram obtidos os resultados apresentados na sequência. As Figuras 2, 3 e 4 apresentam a saída, o erro entre a saída e referência, e o sinal de controle, respectivamente.

Figura 2 – Resposta com referência rampa. As linhas pontilhadas evidenciam os intervalos em que ocorre a variação de massa.



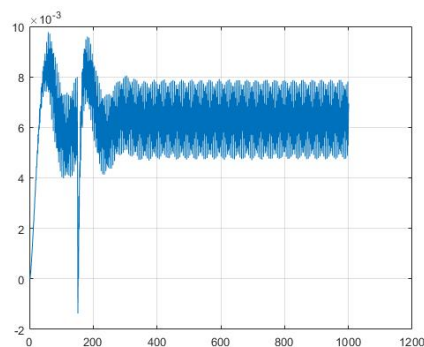
Fonte: Autoria própria.

Figura 3 – Erro com referência rampa.



Fonte: Autoria própria.

Figura 4 – Curva de controle com referência rampa.



Fonte: Autoria própria



4 CONCLUSÕES

A partir dos resultados, concluímos que o controlador de realimentação de estados dependente dos parâmetros variantes no tempo atingiu os resultados esperados para referência rampa. Na referência de rampa notou-se pequenas oscilações na saída devido à variação da massa, porém, a velocidade almejada foi atingida e permaneceu constante. Já a curva de controle apresentou muitas oscilações em baixa escala, uma vez que o controlador não transparece o impacto da variação da massa na saída do sistema, fazendo com que o controlador absorve todo o impacto da variação. Sendo assim, os resultados do presente trabalho indicam que a utilização de técnicas de controle robusto e soluções de LMIs são viáveis, especialmente para o cenário em que o sistema apresenta dependências paramétricas.

REFERÊNCIAS

- BOYD, Stephen. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: Society for Industrial e Applied Mathematics, 1994. ISBN 0-89871-334-X.
- BRAGA, Márcio F. et al. Discretisation and control of polytopic systems with uncertain sampling rates and network-induced delays. **International Journal of Control**, Taylor Francis, v. 87, n. 11, p. 2398–2411, 2014. DOI: [10.1080/00207179.2014.923585](https://doi.org/10.1080/00207179.2014.923585). eprint: <https://doi.org/10.1080/00207179.2014.923585>. Disponível em: [↗](#).
- BRIAT, Corentin. **Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2015. DOI: [10.1007/978-3-662-44050-6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-44050-6). Disponível em: [↗](#).
- GEROMEL, José C.; COLANERI, Patrizio. Robust stability of time varying polytopic systems. **Systems Control Letters**, v. 55, n. 1, p. 81–85, 2006. ISSN 0167-6911. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2004.11.016>. Disponível em: [↗](#).
- LÖFBERG, J. YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In: IN Proceedings of the CACSD Conference. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004.
- OGATA, K.; SEVERO, B. **Engenharia de controle moderno**. [S.l.]: Prentice Hall do Brasil, 1998. ISBN 9788570540744. Disponível em: [↗](#).
- STURM, Jos F. Using SeDuMi 1.02, A MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999. DOI: [10.1080/105567899088805766](https://doi.org/10.1080/105567899088805766). Disponível em: [↗](#).
- XIE, Lin; SHISHKIN, Serge; FU, Minyue. Piecewise Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems. **Systems Control Letters**, v. 31, n. 3, p. 165–171, 1997. ISSN 0167-6911. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(97\)00027-3](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(97)00027-3). Disponível em: [↗](#).