Desenvolvimento do raciocínio matemático e elaboração de conceitos do Cálculo

Development of mathematical reasoning and elaboration of Calculus concepts

Bárbara Falchi* (orientando) André Luis Trevisan† (orientador)

RESUMO

Considerando o desenvolvimento do raciocínio como aspecto central no processo de aprendizagem da Matemática, compreender modos de promovê-lo e ações desempenhadas pelo professor neste processo são questões importantes para investigação. No intuito de aprofundar essas discussões, este artigo tem por objetivo compreender ações que podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático de estudantes que cursam a disciplina da Cálculo Diferencial e Integral. Assumindo uma perspectiva qualitativa de cunho interpretativo, analisamos uma aula dessa disciplina, na qual promoveu-se uma discussão a respeito de uma tarefa exploratória envolvendo a concentração de uma mistura de água e sal variando com o tempo, e a partir dela introduziu-se o conceito de função racional e seu comportamento a longo prazo. Com base em um quadro teórico que classifica as ações do professor a partir de quatro categorias – a constar: convidar; guiar/apoiar; informar/sugerir; e desafiar, são analisados trechos da aula. Como resultados, são apresentados conceitos matemáticos mobilizados pelos estudantes na elaboração de argumentos que buscam justificar suas resoluções, bem como discussões acerca das ações do professor podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, bem como para a compreensão do conceito de função racional.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Raciocínio Matemático. Ações do professor.

ABSTRACT

Considering the development of reasoning as a central aspect in the Mathematics learning process, understanding the ways of promoting it and the actions performed by the teacher in this process are important issues to be investigated. In order to deepen these discussions, this article aims to understand how the teacher’s actions can contribute to the development of the students’ mathematical reasoning who study the discipline of Differential and Integral Calculus. Assuming a qualitative perspective of an interpretative nature, a class in this discipline was analyzed, in which a discussion was promoted regarding an exploratory task, involving the concentration of a mixture of water and salt varying with time, and, from there, it was introduced the concept of rational function and its long-term behavior. Based on a theoretical framework that classifies the teacher's actions according to four categories – to be included: to invite; to guide/to support; to inform/to suggest; and to challenge –, six excerpts from that class are analyzed. As a result, discussions about these actions are presented, showing the continuous and growing movement of them during the teacher’s discussion conduction, and highlighting the implications of such actions for the development of the students' mathematical reasoning, as well as for the understanding of the rational function concept.

* Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil; bahfalchi@gmail.com
† Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Londrina; andrelt@utfpt.edu.br

Keywords: Mathematics Teaching. Differential and Integral Calculus Teaching. Mathematical Reasoning. Teacher's Actions.

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa teve por objetivo analisar e observar o raciocínio matemático de alunos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) enquanto resolviam tarefas exploratórias propostas pelo professor para serem resolvidas em pequenos grupos, durante as aulas, bem como as ações do professor durante discussão coletiva com toda a turma. Desenvolver a capacidade de raciocínio matemático dos alunos não se resume a memorizar conceitos e procedimentos rotineiros. Para Stylianides (2009), raciocinar envolve utilizar informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões. De modo similar, Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 728) reconhecem-no como o "processo que utiliza informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões" e, de modo similar, Jeannotte e Kieran (2017, p.7), como um "processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos".

No geral, pesquisadores afirmam que o processo de raciocinar inclui a formulação de questões, a formulação e teste de conjecturas e a realização de justificações. A parte de formular conjecturas baseia-se em uma ideia, fórmula ou frase, a qual não foi ainda provada ser verdadeira, envolvendo suposições a partir de uma relação matemática. (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

O raciocínio matemático é um processo central na aprendizagem da disciplina de CDI, e o modo de promovê-lo aos alunos é uma temática importante a ser investigada, sendo que as ações desempenhadas pelo professor tem um papel muito importante neste contexto (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018). Mata-Pereira e Ponte (2018, p.55) afirmam que uma das ações mais importantes do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno está na "seleção das tarefas e a comunicação na sala de aula, sublinhando a natureza do questionamento, a negociação de significados e os processos de redizer". Já Ellis, Özgür e Reiten (2018, p. 2) consideram que, para desenvolver o raciocínio dos alunos, "as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos".

Para analisar tais ações do professor, no que se refere ao desenvolvimento do raciocínio dos alunos, alguns pesquisadores desenvolveram dispositivos que ajudam neste trabalho. No modelo proposto por Ponte, MataPereira e Quaresma (2013) são apresentadas quatro ações que devem ocorrer dentro da sala de aula para o desenvolvimento do raciocínio do aluno. A primeira delas é *convidar* que seria o primeiro contato dos alunos com o tema que será abordado. A segunda ação é a de *guiar/apoiar,* em que o professor, por meio de perguntas, conduz os alunos a continuar participando de uma resolução de uma tarefa já iniciada. A terceira ação *informar/sugerir*, momento em que o professor validará as respostas dos alunos, introduzindo novas informações e proporcionando novos argumentos. A última ação é *desafiar*, em que o professor "coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar" (PONTE; MATAPEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59).

Posto isso, delimita-se como problema de pesquisa: quais as possibilidades para promoção do raciocínio matemático em aulas de CDI, a partir do trabalho com algumas tarefas de natureza exploratória? Mais especificamente, pretende-se: (i) reconhecer conceitos matemáticos mobilizados pelos estudantes na elaboração de argumentos que buscam justificar suas resoluções e (ii) compreender ações do professor podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

2 MÉTODO

A pesquisa assume uma perspectiva qualitativa de cunho interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994), e foi construída a partir de etapas. Na primeira etapa, foram realizados estudos de artigos que abordavam o tema de raciocínio matemático como forma de introdução ao assunto, sintetizados na introdução deste relatório.

A etapa seguinte foi constituída de transcrições de áudios/vídeos de aulas de uma turma de CDI I, sob responsabilidade do orientador deste trabalho (2º autor), ocorridas presencialmente no 1º semestre de 2019, em um ambiente de trabalho pautado em episódios de resolução de tarefas (TREVISAN; MENDES, 2018). Os alunos, organizados em pequenos grupos, trabalhavam colaborativamente em tarefas de natureza exploratória (PONTE, 2005). Após, havia uma plenária para compartilhamento das soluções e sistematização dos conceitos. Neste trabalho, em particular, consideramos dados provenientes do trabalho com a tarefa apresentada na Figura 1.

Figura 1. Tarefa proposta

Tarefa. *Um tanque contém 5000 litros de água pura. Uma mistura contendo 750g de sal diluídos em 25 litros de água é bombeada para o tanque a cada minuto. Investigue como se comporta a concentração da água no tanque para valores de tempo "muito grandes".*

Fonte: arquivo pessoal do orientador

Os dados recolhidos para análise são compostos por (i) protocolos contendo registros escritos das discussões dos pequenos grupos de estudantes e (ii) áudios das discussões nos pequenos grupos. Após as transcrições, no caso das discussões dos grupos, foi feita uma divisão e análise de cada trecho para entender como estava sendo construído o raciocínio matemático desde o momento em que liam a tarefa até o momento em que chegavam numa conclusão/resposta. Também foi feita a análise das ações do professor, durante uma discussão coletiva envolvendo toda a turma, e o como elas interferem no raciocínio dos alunos.

Estas análises foram feitas em conjunto com orientador e outra pesquisadora (uma aluna do mestrado). Em uma etapa final, foi feita uma análise de aspectos do raciocínio mobilizados pelos grupos na discussão da tarefa (para esse artigo, são trazidos trechos de um deles), e das ações do professor na condução da plenária (com um pequeno recorte trazido neste trabalho). Para esse artigo, trazemos recortes para exemplificar o trabalho realizado durante a iniciação científica.

3 RESULTADOS

Apresentam-se dados organizados em duas partes. Na primeira, a análise do raciocínio matemático de um grupo de alunos, com destaque para os processos de elaboração de conjecturas e justificação. Na segunda, a análise de parte da discussão coletiva com toda a turma e das ações do professor para promoção do raciocínio matemático.

Parte 1: análise de um trecho da discussão em um dos grupos

[1.1] **R:** Acho melhor a gente fazer uma tabela primeiro, para gente ter uma noção primeiro [...] coloca assim: tempo 1...

[1.2] **A1:** Tá, em t=0... 5 mil...
[1.3] **A3:** Isso. Tempo 1... 5025.
[1.4] **A2:** É.
[1.5] **A1**: 5025 e 750 gramas ... Tempo 2 vai para 5050 e 1500... aqui agora dá para gente pegar quanto está dando a porcentagem da concentração... entendeu? Porque daí a gente começa a pegar a diferença...
[1.6] **A2:** Ah entendi, porque seria só uma crescente infinita...
[1.7] **A1:** É, porque se não aqui olha... tá 100%... a gente tem 5025 e 750 gramas de ... água.
[1.8] **A3:** Faz aí 750 dividido por 5025. É 0,14, a concentração no tempo 1 é 0,14.
[1.9] **A2:** Mas esse Valor é por cento, ou...?
[1.10] **A1:** Não, é a concentração da água?
[1.11] **A3:** É porque concentração é... quantidade de matéria dividido pelo volume total. Então depois de um minuto vai ter, 750 com 5025.

Neste trecho, os alunos começam a pensar como organizar os dados para poder tirar mais conclusões sobre as conjecturas levantadas. Desta forma, começam tentando organizar em uma tabela. Já com algumas conjecturas, conseguem perceber a função como crescente e, supostamente, sem estabilizar-se, então começam a tentar achar maneiras para trabalhar agora com números. A discussão prossegue:

[1.1] **A2:** É, a gente tem que achar a função para poder jogar um número bem lá na frente.
[1.2] **A3:** 5075.
[1.3] **A1:** Faz aí mais uns três tempos...
[1.4] **A3:** Mais uns três?
[1.5] **A1:** isso, tá bom, vê quanto da esses dois. Não, está certo.
[1.6] [realizando cálculos]
[1.7] **A3:** Eu acho que vi um padrãozinho, mas vamos esperar. Que aqui ó...
[1.8] **A2:** De lá para cá da 15 de novo. Daqui para cá e daqui para lá dá 15. Eu adoro quando dá certo.
[1.1] **A1:** Vai chegar uma hora que... porque sempre vai tá acrescentando mais água então a concentração nunca vai ser....
[1.2] **A2:** É porque se tivesse acrescentando só sal uma hora ia saturar, mas está adicionando diluído em água então por mais que ela aumente, não vai crescer pra sempre, ela vai ficar tipo meio que...

Aqui, os alunos começam a investigar, e elaborar argumentos matemáticos para explicar o porquê de a generalização anterior ser falsa. Na sequência, eles conjecturam que em algum tempo específico a concentração vai se manter constante. Por fim, começam a pensar em utilizar relações matemáticas para poder comprovar esta nova conjectura. Procuram então uma fórmula para generalizar a situação:

[1.1] **A2:** É... 5000 mais t vezes 25, porque quando o t é zero fica 5000, t1 é 1 vezes 25, t 2... [1.2] **A1:** Ficaria 5000 mais a constante.
[1.3] **A2:** Não 5000 é a constante.
[1.4] **A3**: Tá bom, vai ficar então 5000 mais 25t mais 750t [1.5] **A2:** deu certo.
[1.6] **A1:** Então a gente tem que fazer... vamos supor, coloca t valendo 3... porque se a gente colocar, por exemplo o t valendo 4 a gente tem que encontrar 0,58, se encontrar tá valendo entendeu?... ai você vai tirar a prova. A gente vai tirar prova da formula. A gente vai jogar t igual a 4 e se encontrar 0,58 a formula bate, se não, tem alguma coisa errada. Entendeu?

Os alunos raciocinam juntos para desenvolver uma fórmula matemática que faça sentido para todos. Depois de encontrar uma fórmula, o aluno procura um jeito de validá-la, e para isso escolhe alguns valores particulares de tempo.

Parte 2: análise de um trecho da discussão em plenária

[1.1] **A5:** Eu acho que vai ficar uma curva assim [indica com as mãos um gráfico côncavo para baixo]. Côncavo para baixo. Porque, à medida que a concentração vai aumentando, menos diferença, à medida que o tempo passa, ela vai fazendo.

[1.1] **Professor**: Menos diferença ela [a concentração] vai fazer? **(Guiar/apoiar)**. [1.2] **A5:** Vai ser uma taxa cada vez menor.

[1.3] **Professor:** Alguém tem valores que conseguem justificar o que ele falou? Alguém fez "contas"? Vocês fizeram algumas contas [apontando para um dos grupos] **(Desafiar)**.

[1.4] **A6**: A concentração é 1,49 vezes 10 a menos 4 [referente ao primeiro minuto].

[1.5] **Professor:** Está ok, mas vamos focar nesses primeiros, mesmo que esteja vezes 10 a menos 4, olhem só para os números, de minuto a minuto o que está acontecendo com a variação, do 1º pro 2º [minutos], do 2º pro 3º [minutos]? **(Guiar/apoiar)**.

[1.6] **A6:** Está praticamente dobrando.

[1.7] **Professor**: Praticamente, mas não dobrando! **(Informar/sugerir).**

Este trecho evidencia três tipos de ações do professor. Em alguns momentos, apresenta indagações aos alunos com efeito de obter respostas e contribuições durante a discussão, ações se enquadram na categoria *guiar/apoiar*, e que são fundamentais para a explicitação das conjecturas elaboradas nos pequenos grupos, bem como suas justificações. Em alguns momentos, as ações do professor procuram validar ou corrigir as respostas dadas pelos estudantes, enquadram-se na categoria *informar/sugerir*. Nesse caso, tem por intenção reformular conjecturas apresentadas pela turma, procurando validá-las ou refutá-las, ou ainda, auxiliando os alunos na explicitação de alguma generalização. Por fim, em [1.3] destaca-se uma ação na categoria *desafiar*, em que o professor solicita à turma justificativas para o fato de que a taxa de variação da concentração é cada vez menor. Tal ação é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes, na medida em mobiliza-os a utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho buscou compreender processos de raciocínio matemático de estudantes de CDI e como as ações do professor, envolvendo uma discussão a respeito de uma tarefa exploratória, podem contribuir para o seu desenvolvimento. Para atingir este objetivo, foram realizadas análises de dados em dois aspectos: o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos enquanto resolviam a tarefa (por meio dos processos de conjecturar, justificar e generalizar) e também as ações do professor durante a discussão coletiva.

Com relação ao primeiro aspecto, há um movimento cíclico (JEANNOTTE; KIERAN, 2017) de raciocinar sobre relações matemáticas e desenvolver afirmações (conjecturar), buscando reconhecer e explicar a validade (ou não) dessas afirmações (justificar) (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). Em alguns momentos, possibilitou ampliar regularidades observadas em casos particulares (generalizar) – como, por exemplo, a variação da quantidade de água e da quantidade de sal, como funções do tempo e, de forma mais geral, a concentração, mostrando assim uma compreensão conceitual (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018).

No segundo aspecto, reconhece-se um movimento contínuo e crescente das ações do professor durante a condução da plenária, relacionadas essencialmente com o aprofundamento das discussões a partir de elementos trazidos pelos próprios alunos, e das oportunidades que se criam para a elaboração de conhecimento matemático nesse processo (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018). Assim, a discussão da tarefa foi iniciada por uma ação de convidar por parte do professor, seguidas de ações de *guiar/apoiar* e *desafiar*, conforme modelo de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013). Ações na categoria *informar/sugerir* se fazem presentes ao longo de toda discussão, em momentos pontuais na qual o professor traz novas informações e/ou valida respostas dos estudantes.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao CNPq, por meio de bolsa da iniciação científica da primeira autora, bem como à Fundação Araucária, na modalidade Bolsista Produtividade do segundo autor.

REFERÊNCIAS

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Alegre: Porto Editora, 1994.

JEANNOTTE, D., KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, p. 1-16, 2017.

LANNIN, J., ELLIS, A. B., ELLIOT, R. Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8. Reston, VA: **National Council of Teachers of Mathematics.** 2011.

MATA-PEREIRA, J., PONTE, J. P. Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. **Bolema**, v. 32, n. 62, p. 781-801, 2018.

MORAIS, C., SERRAZINA, L., PONTE, J. P. Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 4, p. 552-570, 2018.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante,** vol. XXII, n. 2, p. 55-81, 2013.

STYLIANIDES, A. J. The notion of proof in the context of elementary school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, n. 1, p. 1-20, 2007.

TREVISAN; A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 11, n. 1, p. 209-227, 2018.