



Controle misto e modelagem robusta aplicada a um sistema ball and beam

Mixed control and robust modeling applied to a ball and beam system

Anderson Machado da Silva *, Luiz Francisco Sanches Buzachero †

RESUMO

O presente artigo descreve a modelagem matemática em espaço de estados de um sistema do tipo bola e barra, por tratar-se de um sistema não linear são abordados tópicos referentes a teoria de controle robusto, como forma de contornar a não linearidade da dinâmica do sistema, porém buscando garantir a melhor representatividade possível, apresentando também robustez as incertezas associadas. As técnicas utilizadas durante a representação matricial são conhecidas na literatura como incertezas não estruturadas e incertezas paramétricas, onde por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs) e das normas H_∞ e H_2 , são obtidos os parâmetros necessários para o desenvolvimento de um controle que garante a robustez necessária em conjunto com a otimização de sua resposta, a simulação apresentada demonstra que a partir da modelagem descrita, o sistema tem a capacidade de seguir um sinal de referência através de um controlador do tipo servossistema em conjunto com as características adicionais oriundas do controle misto.

Palavras-chave: Controle Robusto. Bola e barra. LMIs. Sistema não linear

ABSTRACT

This article describes the state space mathematical modeling of a ball and beam system, as it is a non-linear system, topics related to robust control theory are addressed, as a way to circumvent the non-linearity of the system dynamics. , but seeking to ensure the best possible representation, also presenting robustness to the associated uncertainties. The techniques used during matrix representation are known in the literature as unstructured uncertainties and parametric uncertainties, where through linear matrix inequalities (LMIs) and the norms H_∞ and H_2 , they are After obtaining the necessary parameters for the development of a control that guarantees the necessary robustness together with the optimization of its response, the simulation presented demonstrates that, based on the model described, the system has the ability to follow a reference signal through a controller of the servosystem type together with the additional features arising from the mixed control.

Keywords: Robust Control. Ball and Beam. LMIs. Nonlinear system

1 INTRODUÇÃO

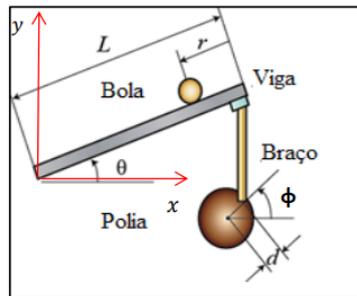
O trabalho a seguir possui como objetivo utilizar técnicas de controle robusto como forma de representar as não linearidades de um sistema, descrevendo as dinâmicas proporcionadas por estas como incertezas, a partir disso será desenvolvido um controle misto, por meio das normas H_∞ e H_2 , de forma a garantir estabilidade e capacidade do mesmo seguir um sinal de referência através de um controlador do tipo servossistema.

*  Engenharia de Controle e Automação;  andersonsilva.1999@alunos.utfpr.edu.br.

†  Departamento de Acadêmico de Engenharia;  luizf@utfpr.edu.br;  <https://orcid.org/0000-0001-9906-4490>.

Na literatura o sistema em questão é conhecido como *Ball and Beam*, o seu funcionamento consiste em movimentar uma bola, que está livre para deslocar-se sobre uma plataforma, o controle ocorre através da rotação de um motor que está conectado a barra, alterando horizontalmente o ângulo da mesma, de modo que seja possível controlar a posição da bola. A Fig. 1 apresenta uma formulação semelhante aos modelos propostos por (WEI, 2010) e (WELLSTEAD, 2000).

Figura 1 – Esquemático do sistema



Fonte: Adaptado de CTMS (2021)

Outro ponto desejável para o projeto é desenvolver um controle que garanta certa robustez, segundo (TROFINO, 2000) toda modelagem é na verdade uma aproximação do sistema físico real, já que o modelo pode apresentar diferentes tipos de incertezas, decorrentes de dinâmicas não modeladas, incertezas de medições, ruídos, linearização, entre outros. O sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) que descrevem a dinâmica desse sistema é:

$$\begin{aligned} \left(\frac{J_b}{R^2} + m\right) \ddot{x} - mg \sin(\theta) - mx\dot{\theta}^2 &= 0 \\ (mx^2 + J) \ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta} - mg \cos(\theta) &= \lambda \end{aligned} \quad (1)$$

onde J é o momento de inércia da barra, J_b o momento de inércia da bola, R é o raio da bola, x é a posição da bola, m é a massa da bola e θ posição angular, além disso estão presentes também velocidade, aceleração, tanto angular quanto tangencial, definidas pelas derivadas de primeira e segunda ordem de x e θ . Há também λ que é um sinal de controle, fisicamente o torque, g é aceleração gravitacional.

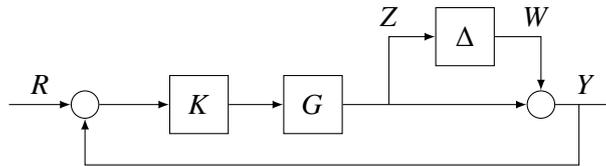
As variáveis de estados escolhidas para representar a dinâmica do sistema no espaço de estados são $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$. Porém como mencionado anteriormente o sistema não pode ser representado por equações lineares, apresentando assim incertezas, seria possível controlar um sistema cuja não sua dinâmica não é precisamente conhecida durante seu funcionamento?.

2 MÉTODO

Em (ZHOU; DOYLE, 1998) as incertezas não estruturadas são descritas como erros genéricos que estão associados a todos os modelos de projeto. Na Figura 2, está representado graficamente o conceito de incerteza não estruturada apresentado em (GREEN; LIMEBEER, 2012), onde Δ caracteriza um ganho estático, atuando como um bloco de realimentação interno, Z como entrada e W saída, G é uma função de transferência genérica, K um controlador e R o sinal de entrada.

Pode-se considerar que o sistema descrito na Fig. 2 possui um vetor de saída real, denotado por $y(t)$ e um vetor interno $z(t)$, o sinal que sai para o bloco referente as incertezas, assim segundo (BOYD et al., 1994) o

Figura 2 – Incerteza não estruturada



Fonte: Adaptado (GREEN; LIMEBEER, 2012)

sistema pode ser equacionado como em Eq. (2).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w W(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yu} u(t) + D_{yw} W(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} W(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Em (THOMAS, 2012) é descrito que pode-se rescrever as funções trigonométricas, através da série de Taylor. Aplicando esse conceito em conjunto com a incerteza não estruturada, pode-se substituir as funções seno e cosseno nas EDOs por uma função linear em função de uma incerteza ξ , assumindo que:

$$\text{sen}(\gamma) = \gamma(1 + \xi_1) \quad (3)$$

$$\text{cos}(\gamma) = 1 + \gamma\xi_2 \quad (4)$$

O limite para ambas incertezas dependerá do valor máximo de γ , no sistema esse ângulo corresponde ao θ , supondo que a variação seja de ± 30 graus, têm-se:

$$-0.0451 \leq \xi_1 \leq 0 \quad (5)$$

$$-0.2559 \leq \xi_2 \leq 0.2559 \quad (6)$$

Ao utilizar incertezas paramétricas, a matriz A é descrita como uma soma de matrizes em função de uma variável, que representa a incerteza associada ao sistema, desta forma não linearidades e a multiplicações entre variáveis de estado podem ser representadas. Ao utilizar tal técnica a matriz de dinâmica do sistema será descrita com 2^q matrizes, onde q corresponde ao número de incertezas paramétricas.

Para o sistema em estudo, que conta com três incertezas, a representação necessita de oito valores de coeficientes, que são associados aos vértices do polítopo responsável por delimitar o espaço em que os valores incertos podem assumir. As incertezas escolhidas assim como os índices que as descreve são apresentadas em Eq. (7)

$$\begin{aligned} x\dot{\theta} &= A_m \alpha_1 + A_M \alpha_2 = \alpha \\ \dot{\theta}^2 &= B_m \beta_1 + B_M \beta_2 = \beta \\ \frac{1}{mx^2 + J} &= C_m \nu_1 + C_M \nu_2 = \nu \end{aligned} \quad (7)$$

Além disso é necessário definir o limite das incertezas paramétricas, sendo que para tal calculo foi considerado uma velocidade angular de ± 5 graus/s, um ângulo máximo de $\pm 30^\circ$, os valores estão na Tab. 1. Os demais parâmetros dimensionais do sistema foram definidos na Tab. 2.

Tabela 1 – Limites das incertezas paramétricas

α_{min}	α_{max}	β_{min}	β_{max}	ν_{min}	ν_{max}
-0.0524	0.0524	0	0.0076	3.2053	83.3669

Fonte: Autoria Própria (2021)

Tabela 2 – Propriedades

R	5 cm	comprimento da barra	60 cm	m	500 g
J_b	$5 \times 10^{-4} Kg.m^2$	espessura da barra	8 mm	g	$9.81 m/s^2$
J	$0.01198 Kg.m^2$	largura da barra	8 cm	densidade da barra	$1.04g/cm^3$

Fonte: Autoria Própria (2021)

Após a toda a construção descrita até o momento, ainda há um problema de representatividade, pois existe um termo (mg) que permanece independente das variáveis de estados e também das incertezas, então será considerado no sinal de controle $\lambda = u - mg$, como foram de contornar esse problema, assim u passa a ser o sinal efetivo de controle. Isolando os termos \ddot{x} e $\ddot{\theta}$ em (1), substituindo também as incertezas e o sinal de controle, obtém-se Eq. (8), onde $\Omega = \frac{J_b}{R^2} + m$.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{m(\beta x + g\theta(1 + \xi_1))}{\Omega} \\ \ddot{\theta} &= (u + m(\theta\xi_2 + 2\alpha x))\nu \end{aligned} \quad (8)$$

Por fim descrevendo o sistema como em Eq. (2), têm-se as matrizes A na Eq. (9), $B_u + B_w$ respectivamente na Eq. (10). Foi incluso também na modelagem um controlador do tipo servossistemas, de acordo com (OGATA, 2010) a dinâmica associada a este controlador possibilita que um sistema do tipo 0, isto é, sem polos na origem, siga um determinado sinal de referência para entrada do tipo degrau, essa dinâmica do controlador é integrada com a modelagem robusta, caracterizada na Eq. (11).

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_1\nu_1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mb_m}{\Omega} & 0 & \frac{mg}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2ma_m c_m & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_1\beta_1\nu_2 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mb_m}{\Omega} & 0 & \frac{mg}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2ma_m c_M & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ \alpha_1\beta_2\nu_1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mb_M}{\Omega} & 0 & \frac{mg}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2ma_m c_m & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_1\beta_2\nu_2 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mb_M}{\Omega} & 0 & \frac{mg}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2ma_m c_M & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ \alpha_2\beta_1\nu_1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mb_m}{\Omega} & 0 & \frac{mg}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2ma_M c_m & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2\beta_1\nu_2 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mb_m}{\Omega} & 0 & \frac{mg}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2ma_M c_M & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ \alpha_2\beta_2\nu_1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mb_M}{\Omega} & 0 & \frac{mg}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2ma_M c_m & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2\beta_2\nu_2 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mb_M}{\Omega} & 0 & \frac{mg}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2ma_M c_M & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$



$$\alpha\beta \left(v_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_m \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_M \end{bmatrix} \right) + \alpha\beta \left(v_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{mg}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & mgc_m \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{mg}{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & mgc_M \end{bmatrix} \right) \quad (10)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} W + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (11)$$

O conceito de H_∞ possibilita quantificar a energia do sistema, a partir *Linear Matrix Inequalities* (LMIs), possibilitando assim definir os parâmetros do controlador, de forma que o mesmo seja robusto o suficiente para estabilizar o sistema mesmo com valores incertos por parte da modelagem. O máximo de energia atribuída ao sistema encontrado foi de 0.7033, aplicando a norma infinita entre os elementos de (5) e (6) obtém-se o valor mínimo de robustez que o sistema deve possuir para garantir a estabilidade no caso 3.9082.

No H_∞ busca-se garantir a estabilidade para o caso mais extremo do sistema, a partir de H_2 será considerado uma valor médio de energia, como essa técnica de controle está associada com *Linear Quadratic Regulator* (LQR), conceito oriundo da teoria de controle ótimo, possibilita ponderações que podem melhorar o desempenho do sistema. Para isso o sistema passa a ser descrito como em Eq. (12), as matrizes anteriores recebem o índice infinito e demais que não foram descritas até então estão representadas em Eq. (13) e Eq. (14).

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_{w\infty} W + B_{w2} W \quad (12)$$

$$Z = C_z x + D_{zu} u + D_{zw} W + C_{z2} x + D_{z2} u$$

$$B_{w2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

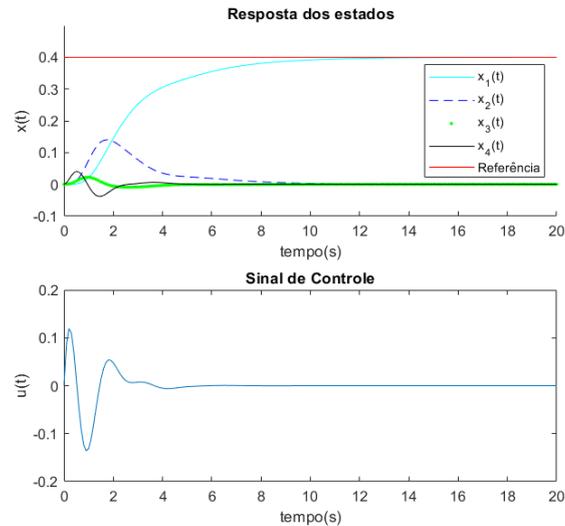
$$C_{z2} x + D_{z2} u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (14)$$

3 RESULTADOS

A partir de (KHALIL, 2015) sabe-se que ao utilizar a H_∞ a resposta do sistema será lenta, porém com a magnitude do sinal de controle baixa. Por isso a simulação realizada utiliza o controle misto, de forma que seja garantido a estabilidade por meio de H_∞ , porém com a resposta otimizada pela norma H_2 , de forma que o tempo de acomodação não seja muito grande, mas também com a magnitude do sinal de controle pequena. A ponderação utilizada para a definição dos parâmetros do controlador foi 10 vezes mais prioridade para transitório em relação ao sinal de controle, o que resultou no vetor de ganhos [-8.9452 -6.5836 -26.1387 -4.7142 2.8085]. A resposta do sistema bem como o sinal de controle estão em Fig. 3



Figura 3 – Simulação



Fonte: Autoria Própria (2021).

4 CONCLUSÕES

A partir do trabalho foi possível aplicar os conceitos de controle robusto, através do sistema proposto, demonstrando a possibilidade de outras abordagens para um sistema conhecido na literatura. Através de simulações computacionais foi possível garantir para o sistema além da estabilidade, uma performance otimizada. Como perspectiva para o futuro, fica aberto a possibilidade de uma implementação física e de criação de kits didáticos para serem utilizados nas aulas práticas dentro da universidade por outros alunos.

REFERÊNCIAS

- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. 15. ed. Philadelphia: Society for Industrial e Applied Mathematics (SIAM), 1994. (SIAM) studies in applied mathematics.
- GREEN, M.; LIMEBEER, D.J.N. **Linear robust control**. Mineola: Dover Publications, 2012.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear control**. 1. ed. Londres: Pearson Education, 2015. ISBN 978-12-9206-050-7.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. ISBN 978-85-4301-375-6.
- THOMAS, G. B. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Person Education do Brasil, 2012. Tradução de C. Scalici. ISBN 978-85-8143-086-7.
- TROFINO, A. **Controle Robusto**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2000.
- WEI, W. **A Research on Control Methods of Ball and Beam System Based on Adaptive Neural Network**. International Conference on Computational e Information Sciences: IEEE, 2010.
- WELLSTEAD, P. E. **Introduction to Physical System Modelling**. 4. ed. Chennai: Control Systems Principles, 2000.
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C. **Essentials of robust control**. Upper Saddle River: Prentice hall, 1998.