



SEI-SICITE 2021

Pesquisa e Extensão para um mundo em transformação

XI Seminário de Extensão e Inovação  
XXVI Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica  
08 a 12 de Novembro - Guarapuava/PR



# Síntese de Controladores LQR Robustos Chaveados via LMIs com Otimização através de Algoritmo Genético.

*Synthesis of Switched Robust LQR Controllers via LMIs with Optimization by Genetic Algorithm.*

Vanessa Caroline de Almeida Cirineu \*, Luiz Francisco Sanches Buzachero †

## RESUMO


Os sistemas que envolvem uma interação entre dinâmicas e são redigidos por uma determinada lógica de chaveamento, são definidos como sistemas chaveados. Neste tipo de sistema, é possível definir um controle global superior se comparado a outras técnicas de controle definidos a partir de um único ganho, onde é possível tratar e determinar características como bom desempenho e estabilidade, permitindo abordar sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV, acrônimo em inglês para Linear Parameter Varying), sem que seja necessário medir seus valores a cada instante de tempo. No presente trabalho, buscou-se aplicar uma recente técnica de controle, a qual utiliza a otimização através do Regulador Linear Quadrático (LQR, acrônimo em inglês para Linear Quadratic Regulator) via Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, acrônimo em inglês para Linear Matrix Inequalities), sendo as ponderações das matrizes Q e R encontradas através da otimização do sistema, utilizando o Algoritmo Genético, minimizando o critério ITAE (acrônimo em inglês para Integral of Time-weight Absolute Error), obtendo então os melhores valores para a estabilização do sistema massa-mola proposto, o qual possui parâmetros fixos e variantes, sendo este último, a constante elástica do sistema. Ainda, a LMI proposta para a técnica de controle abordada, utiliza taxa de decaimento e factibilidade, parâmetros esses importantes para a obtenção de um bom desenvolvimento do sistema, entretanto, também podem comprometer o chaveamento dos controladores obtidos.


**Palavras-chave:** LQR. Controle Robusto. Sistema Chaveado. Algoritmo Genético.

## ABSTRACT

The systems that involve an interaction between dynamics and are composed by a certain switching logic, are defined as switched systems. In this type of system, it is possible to define a global controller superiority compared to other control techniques defined by a single gain, where it is possible to treat and determine characteristics like good performance and stability, allowing to approach LPV systems, without the need to measure their values all the time. This paper aimed to apply, searched to apply a recent control technique, which uses the optimization through LQR via LMI, being the ponderations of the matrix Q and R found through the optimization of the system, using the Genetic Algorithm, minimising the ITAE criteria, getting the best values for the stabilization of the proposed mass-spring system, which has fixed and variable parameters, the latter being, the elastic constant of the system. Furthermore, the LMI proposed for the control technique utilized, uses rate of decay and feasibility, which are important parameters for obtaining a good system development, however, it can compromise the switching of the controllers obtained.

**Keywords:** LQR. Robust Control. Switched System. Genetic Algorithm.

\*  Engenharia de Controle e Automação; ✉ [vanessacirineu@alunos.utfpr.edu.br](mailto:vanessacirineu@alunos.utfpr.edu.br).

†  Departamento Acadêmico de Engenharia Elétrica - DAELE; ✉ [luizf@utfpr.edu.br](mailto:luizf@utfpr.edu.br).



## 1 INTRODUÇÃO

Os sistemas cujo comportamento é determinado pela interação entre dinâmicas, têm atraído grande interesse em pesquisas de diversas áreas devido à sua importância e às suas inúmeras aplicações. Na maioria delas, o principal foco está na dinâmica e em suas propriedades, como a estabilidade, onde uma certa lógica de chaveamento escolhe uma das dinâmicas, sendo então os chamados sistemas chaveados, os quais possibilitam um controle global superior se comparado a outras técnicas de controle definidos a partir de um único ganho, como boas características de desempenho e estabilidade (DEAECTO, 2010), permitindo tratar sistemas com parâmetros variáveis sem que seja necessário medir seus valores a cada instante de tempo. Neste sentido, os controladores robustos para sistemas chaveados, são aqueles que propõem uma regra de chaveamento (SKAFIDAS E., 1999) para selecionar o melhor ganho dentre um conjunto, a fim de se assegurar a estabilidade assintótica global do sistema.

Uma relevante estratégia utilizada em conjunto ao sistemas chaveados robustos, é o Regulador Linear Quadrático (LQR, acrônimo em inglês para *Linear Quadratic Regulator*), o qual tem como objetivo aumentar o desempenho dos estados e das entradas de controle através da ponderação otimizada das matrizes  $Q$  e  $R$ . Entretanto, um desafio desta técnica é, como encontrar os valores ideais das matrizes para controlar o sistema? Desta forma, para se obter a ponderação otimizada, este estudo utilizou o algoritmo genético (BETETO M. A. L., 2016), o qual minimiza o critério ITAE (acrônimo em inglês para *Integral of Time-weight Absolute Error*), obtendo e utilizando a melhor das opções de ganho para o bom desempenho do sistema. Portanto, o objetivo deste documento é apresentar a síntese e implementação simulada do controle robusto chaveado LQR via LMIs (acrônimo em inglês para *Linear Matrix Inequalities*) (BOYD S., 1994) que estabiliza o sistema estudado, tendo como incerteza a constante elástica, a qual se desgasta com o tempo.

## 2 MÉTODO

### 2.1 Controle LQR Robusto

O LQR é uma técnica de controle ótimo, que enfatiza o bom desempenho do sistema. Este controle gera um sinal  $u(t)$  de maneira a minimizar uma função objetivo, dada por

$$J = \int_0^{\infty} x(t)' Q x(t) + u(t)' R u(t) dt \quad (1)$$

Onde a resolução da Eq.(1) retorna a matriz de ganho que produz o menor custo. As ponderações são dadas em  $Q$ , para a energia dos estados, e em  $R$ , para a energia do controle. O teorema apresentado a seguir, propõe condições LMIs suficientes ((CAUN R. P., 2015); (GE M., 2002)) para a estabilização do sistema com controlador LQR.

**Teorema 3** Dado  $Q \in R^{n \times n}$ ,  $R \in R^{m \times m}$  e  $x(0) \in R^{n \times m}$ , o sistema é estável e com desempenho otimizado se existir uma matriz suficiente simétrica  $X > 0 \in R^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in R^{m \times n}$  que satisfaçam as LMIs:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ & X = X' > 0, Y \end{aligned}$$



$$s.a. \begin{bmatrix} \mu & x(0)' \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA' + BY + Y'B' & X & Y' \\ X & -Q_i^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -R_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

E o ganho de realimentação é dado por  $K = -YX^{-1}$ , sendo  $X^{-1} = P$ . A demonstração deste teorema pode ser visto em ((CAUN R. P., 2015); (GE M., 2002)).

## 2.2 Controle LQR Chaveado Robusto

Este controlador foi implementado a partir da inédita contribuição em (PERCORA P. A., 2020).

**Teorema 4** Dada as matrizes de ponderação  $Q_i$  e  $R_i$ , se existirem matrizes simétricas positivas definidas  $S_i = S_i' > 0$ ,  $S_i \in R^{n \times n}$  e matrizes  $Y_i \in R^{m \times n}$  para todo  $i \in K$ , constantes  $\gamma \geq 0$ , para obtenção de factibilidade e  $\alpha \geq 0$  para a restrição da taxa de decaimento, então a origem  $x = 0$  do sistema realimentado com os controladores chaveados será um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, estando o sistema sujeito a taxa de decaimento maior ou igual a  $\alpha$ , se minimizarmos um escalar  $\mu > 0$  tais que as condições a seguir sejam satisfeitas

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ & S_i = S_i' > 0, Y_i \\ s.a. \quad & \begin{bmatrix} \mu & x(0)' \\ x(0) & S_i \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

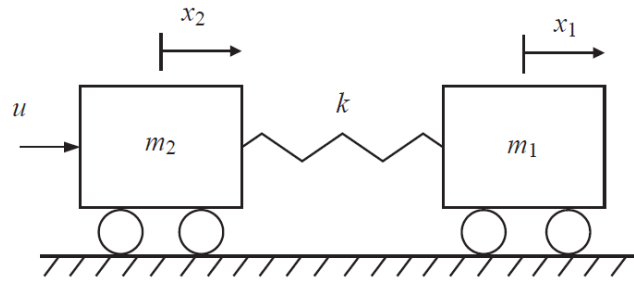
$$\begin{bmatrix} Sym\{A_j S_i + B_j Y_i\} - \gamma S_i + 2\alpha S_i & \gamma S_i & \dots & \gamma S_i & S_i & Y_i' \\ \gamma S_i & -\gamma S_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \gamma S_i & 0 & 0 & -\gamma S_N & 0 & 0 \\ S_i & 0 & 0 & 0 & -Q_i^{-1} & 0 \\ Y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_i^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad i, j \in K \times K \quad (5)$$

Sendo  $Sym\{a\} = a + a'$ . E a regra de chaveamento  $\sigma(x(t)) = \operatorname{argmin}_{i \in K} x(t)' S_i^{-1} x(t)$  e os controladores  $K_i = Y_i S_i^{-1}$  para todo  $i \in K$ , garantem que a origem do sistema em malha fechada seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, onde o sistema está sujeito a uma taxa de decaimento  $\alpha$ . A demonstração deste teorema pode ser vista em (PERCORA P. A., 2020).

## 2.3 Sistema Massa-Mola

O estudo consiste em um sistema massa-mola, que envolve dois carros, conectadas por uma mola com determinada constante elástica, a qual é um parâmetro incerto a ser modelado (BUZACHERO, 2014). O modelo pode ser visto na Fig. 1.

Figura 1 – Modelo do Sistema Massa-Mola-Massa.



Fonte: Skafidas et. al. (1999).

Matematicamente, o modelo da Fig. 1 em equações no espaço de estados é dado pela Eq. (6), e os valores nominais das massas e da constante podem ser verificados na Tab.(1).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{-k}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (6)$$

Tabela 1 – Dados do Sistema Massa-Mola-Massa

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa 1 (Kg)	$m_1$	1
Massa 2 (Kg)	$m_2$	1
Constante Elástica Mola (N/m)	$k$	1.25

Fonte: Autoria Própria (2021).

A constante elástica (parâmetro incerto) pode assumir valores no intervalo  $0,5 \leq k(t) \leq 2,0$  para todo  $t \geq 0$ . A partir deste sistema, implementou-se as técnicas apresentadas na presente seção, e os resultados poderão ser vistos na seção de Resultados.

### 3 RESULTADOS

Considerando o sistema em espaço de estados (Eq. (6)) e a Tab. 1, formulou-se os politopos de incerteza, com duas matrizes  $A$ . E para realizar o controle LQR, realizou-se uma busca otimizada das matrizes de ponderação através do algoritmo genético para cada combinação politópica.

No contexto de utilização do algoritmo genético, a função objetiva a ser minimizada é definida pelo critério ITAE (Integral do Erro Absoluto), entre a entrada e a saída do sistema vezes o tempo, dado matematicamente por

$$ITAE = \int_0^{T_s} t|e(t)|dt \quad (7)$$

Para originar a busca, foram utilizados valores aleatórios da primeira geração nas matrizes. O valor do índice foi calculado para cada indivíduo, e os menores valores geraram as próximas gerações, formando novos valores para  $Q$  e  $R$  e assim sucessivamente, até que este resultado não apresentasse diferenças expressivas entre as gerações. Em conjunto, o Teorema 2 foi implementado para o sistema, fazendo  $x_0 = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\gamma = 0.03$  e  $\alpha = 0.2$ . As matrizes  $Q$  e  $R$  que alcançaram o melhor critério de desempenho e os respectivos ganhos  $K$  foram



$$Q_1 = \begin{bmatrix} 586.6599 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35.8794 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 356.3711 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3031 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 573.5715 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29.1988 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 484.1267 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6935 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$R_1 = [0.0047]$$

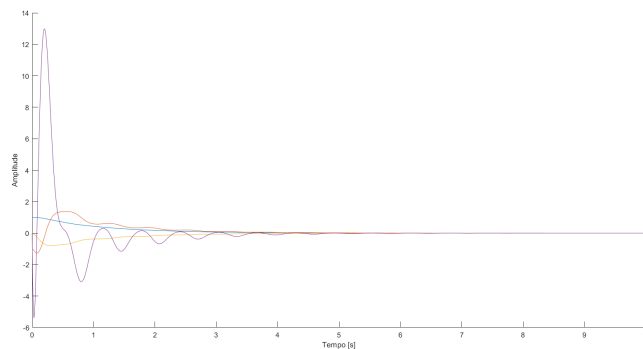
$$R_2 = [0.0161]$$

$$K\{1,1\} = [-896.2 \quad -477.0 \quad -1763.1 \quad -38.9]$$

$$K\{1,2\} = [-398.8130 \quad -256.9979 \quad -875.8826 \quad -25.0654] \quad (9)$$

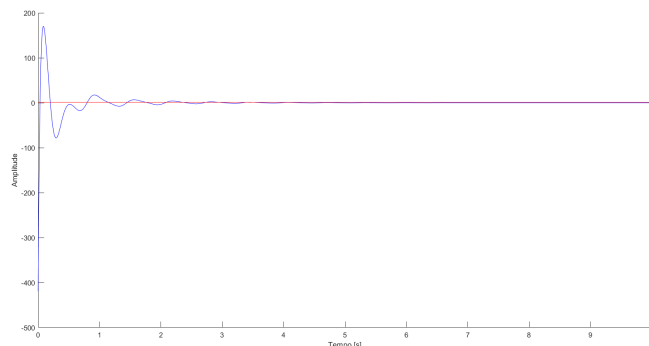
Através da lei de chaveamento, é aplicado o melhor dentre esses ganhos para controlar o sistema. Vale ressaltar que, ao alterar os valores de  $\alpha$ , o sistema pode não chavear, e este é um resultado muito comum, tendo em vista que  $\alpha$  é definido empiricamente. Desta forma, o sistema evolui conforme o resultado apresentado na Fig.(2). E o sinal de controle  $u(t)$  está apresentado na Fig.(3), com o respectivo ganho  $K$  escolhido pela lei.

**Figura 2 – Evolução dos Estados pelo Tempo.**



Fonte: Autoria Própria (2021).

**Figura 3 – Sinal de Controle ( $u(t)$ ) pelo Tempo.**



Fonte: Autoria Própria (2021).



## 4 CONCLUSÕES

Este trabalho abordou a análise do comportamento do sistema massa-mola, através de índices de desempenho após a aplicação do controlador robusto chaveado LQR através de LMI, associando a taxa de decaimento e a factibilidade no projeto de controle. Nesta pesquisa, foi possível perceber como os parâmetros podem alterar os resultados do sistema, como o tempo de acomodação, e especificamente, o chaveamento. É observável que neste caso, o sistema não chaveou, e isto se dá pelo valor de  $\alpha$ , pois alterando-o, o sistema se comporta de formas diferentes, onde os valores propostos para  $\alpha$  não chavearam o controlador nos inúmeros testes, devido a lei de chaveamento, que escolhe o menor e melhor, portanto o controlador escolhido pode ser único durante todo o tempo de controle do sistema. Apesar de neste caso o controlador ter sido constante, em muitas situações, o chaveamento pode ser frequente, já que são considerados ilimitados chaveamentos, o que não é o ideal para sistemas reais, porém, interessante para sistemas que necessitam da técnica. Ademais, o estudo conseguiu evidenciar as vantagens na implementação de controladores ótimos, mesmo variante no tempo, garantiu um desempenho satisfatório para o projeto, e as figuras comprovam que o sistema incerto estabilizou. Além disto, o Teorema utilizado também permite flexibilidade na quantidade de controladores, que neste caso foram apenas dois, porém, pode ser utilizado em sistemas que exigem uma quantidade maior, além de permitir ser usado juntamente os parâmetros variantes, abrangendo então outras proporções de problemas que podem ser controlados e estabilizados a partir desta implementação.

## REFERÊNCIAS

- BETETO M. A. L., et. al. Síntese de controlador lqr-derivativo robusto via lmi: sintonia através de algoritmo genético. **XXI Congresso Brasileiro de Automática - CBA**, Vitória, 2016.
- BOYD S., et. al. Linear matrix inequalities in systems and control theory. **SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics**, Philadelphia, 1994.
- BUZACHERO, L. F. S. **Controle robusto chaveado de sistemas lineares variantes no tempo com aplicação em falhas estruturais**. 2014. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira., Ilha Solteira (SP).
- CAUN R. P., et. al. Controlador LQR via aproximação LMI com restrição de taxa de decaimento aplicado ao Helicóptero 3-DOF de bancada. **Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**, 2015.
- DEAECTO, G. S. **Projeto de controladores dinâmicos com comutação**: aplicação em sistemas mecânicos e conversores de potência CC-CC. 2010. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Campinas (SP).
- GE M., et. al. Robust pid controller design via lmi approach. **Journal of Process Control**, p. 3–13, 2002.
- PERCORA P. A., et. al. Síntese de controladores robustos chaveados, otimizados via matrizes LQR. **SEI SICITE 2020**, Toledo (PR), 2020.
- SKAFIDAS E., et. al. Stability results for switched controller systems. **Automatica**, p. 553–564, 1999.