SEI-SICITE 2021
Pesquisa e Extensão para um mundo em transformação

XI Seminário de Extensão e Inovação
XXVI Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica
08 a 12 de Novembro - Guarapuava/PR

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS GUARAPUAVA

Coloração Total em Potências de Ciclos

Total-Coloring on Powers of Cycles

Daniel Akira Mori *, Sheila Morais de Almeida†

RESUMO

Uma coloração total em um grafo é uma atribuição de cores para seus vértices e arestas de forma que quaisquer dois elementos adjacentes tenham cores distintas. O Problema da Coloração Total é, dado um grafo G, determinar seu número cromático total, $\chi''(G)$, que é o menor número de cores para uma coloração total de G. Por definição, $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$, onde $\Delta(G)$ é o maior número de arestas incidentes em um mesmo vértice de G. Quando $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$, o grafo é Tipo 1; quando $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$, o grafo é Tipo 2. A Conjectura da Coloração Total (TCC), que está em aberto desde 1965, diz que $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$, para qualquer grafo simples G. Decidir se um grafo simples é Tipo 1 é um problema computacionalmente difícil (NP-completo). Campos provou em 2004 que a TCC vale para a k-ésima potência do ciclo C_n, denotada por C_n^k, quando n é par, e n e k são inteiros positivos. Neste trabalho, a técnica de Campos foi modificada e uma coloração total para um subgrafo gerador do C_n^k foi obtida. Considerando esta coloração e n com qualquer paridade, propriedades sobre as listas de cores usadas e disponíveis em cada vértice do grafo são provadas.

Palavras-chave: coloração total. potência de ciclo. número cromático total. teoria dos grafos.

ABSTRACT

A total coloring of a graph is an assignment of colors to its vertices and edges such that any two adjacent elements have distinct colors. The Total Coloring Problem is, given a graph G, determining its total chromatic number, which is the minimum number of colors for a total coloring of G. By definition, $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$, where $\Delta(G)$ is the maximum number of edges that share a common vertex of G. If $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$, the graph is Type 1; if $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$, the graph is Type 2. The Total Coloring Conjecture (TCC), which remains open since 1965, states that $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$, for any simple graph G. Deciding if a simple graph is Type 1 is a hard computational problem (NP-complete). In 2004, Campos proved TCC holds for the kth power of the cycle C_n, denoted by C_n^k, when n is even, and n and k are positive integers. In this paper, the Campos technique is adapted, and a total coloring for a spanning subgraph of C_n^k is obtained. Considering this coloring and any parity of n, properties about the lists of assigned and available colors for each vertex of the graph are proved.

Keywords: total coloring. power of cycle. total chromatic number. graph theory.

1 INTRODUÇÃO

Um *grafo* $G = (V(G), E(G))$ é constituído por um conjunto de vértices, $V(G)$, um conjunto de arestas, $E(G)$, e uma função de incidência que relaciona cada aresta a um par não ordenado de vértices de G. Os vértices deste par são denominados *extremos*. Uma aresta com extremos u e v é denotada por (u,v). Se $u = v$ então (u,v) é um *laço*. Se duas arestas distintas possuem os mesmos extremos são arestas *múltiplas*. Se um grafo não possui

* Departamento Acadêmico de Informática, Câmpus Ponta Grossa; mori.2018@alunos.utfpr.edu.br.
† Departamento Acadêmico de Informática, Câmpus Ponta Grossa; sheilaalmeida@utfpr.edu.br; https://orcid.org/0000-0002-8639-3532.

arestas múltiplas nem laços, então é um *grafo simples*; caso contrário, é um *multigrafos*. Neste artigo, todos os grafos são simples.

Os vértices e arestas de um grafo são chamados de *elementos*. Dois elementos são *adjacentes* se são dois vértices que compartilham uma aresta, ou duas arestas que compartilham um vértice, ou uma aresta e um vértice em que incide. Uma *coloração total* de um grafo G é uma associação de cores aos elementos de G de forma que quaisquer dois elementos adjacentes possuam cores distintas. O *número cromático total* de G, $\chi''(G)$, é o menor número de cores necessárias para realizar uma coloração total em G. O *Problema da Coloração Total* é determinar $\chi''(G)$ quando é dado um grafo G.

Considere um grafo G e um vértice $v \in V(G)$. O número de arestas incidentes em v é o *grau* de v, denotado por $d(v)$. O *grau máximo* de um grafo G, denotado por $\Delta(G)$ é o maior dentre os graus dos vértices de G. Em 1965, Behzad (1965) e Vizing (1965) em trabalhos independentes apresentaram a *Conjectura da Coloração Total*, abreviadamente TCC (do inglês *Total Coloring Conjecture*), segundo a qual todo grafo simples G tem $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$. Se a TCC for verdadeira, então todo grafo simples pode ser classificado em Tipo 1 (quando $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$) ou Tipo 2 (quando $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$).

O Problema da Coloração Total foi apresentado por Behzad (1965) há mais de 50 anos e não se conhece um algoritmo que o resolva eficientemente. Segundo Sánchez-Arroyo (1989), decidir se $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ é computacionalmente difícil (NP-completo). Devido a dificuldade computacional do problema, vários pesquisadores o restringem a classes de grafos específicas. Rosenfeld Rosenfeld (1971) provou que a TCC é válida para todos grafos cúbicos. Yap, Jian-Fang e Zhongfu (1989) provaram a TCC para todos os grafos multipartidos completos. Chew e Yap (1992) e Hoffman e Rodger (1992) provaram que todo multipartido completo com número de vértices ímpar é Tipo 1. Figueiredo, Meidanis e Mello (1999) determinaram o número cromático total dos grafos dualmente cordais com grau máximo par.

Um *ciclo* com n vértices, denotado por C_n, é um grafo com conjunto de vértices $V(C_n) = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $E(C_n) = \{(v_i, v_{(i+1) \pmod n}) : 0 \leq i < n\}$. A k-ésima *potência de ciclo*, C_n^k, é o grafo com conjunto de vértices $V(C_n^k) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $E(C_n^k) = E^1 \cup E^2 \cup \ldots \cup E^k$, onde $E^i = \{(v_j, v_{(j+i) \pmod n}) : 0 \leq j \leq n-1\}$. Observe que o grafo ciclo C_n é a potência de ciclo C_n^1.

Para as potências de ciclos, o Problema da Coloração Total tem alguns resultados parciais. Se $k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então existe aresta entre todo par de vértices. Neste caso, o grafo é chamado de *grafo completo* e denotado por K_n. Os grafos completos são Tipo 1 se e somente se n é ímpar, como provado por Behzad, Chartrand e Cooper (1967). Se $k = 1$, então C_n^1 é Tipo 1 se e somente se n é múltiplo de 3, de acordo com Yap (1996). Campos e Mello (2003) provaram que se $k = 2$ e $n \geq 6$, a potência C_n^k é Tipo 1 se e somente se $n \neq 7$. Para $k \in \{3,4\}$ o número cromático total das potências de ciclos foi determinado por Almeida et al. (2014) e Zorzi, Figueiredo e Machado (2020). Então, o número cromático total dos grafos C_n^k com $k \leq 4$ ou $k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é conhecido. Para outros valores de k, há apenas resultados parciais. Campos e Mello (2003) provaram que se n é ímpar e $k > \frac{n}{3} - 1$, então C_n^k é Tipo 2. Zorzi, Figueiredo e Machado (2020) provaram que para qualquer k par e $n \geq 4k^2 + 2k$, o grafo C_n^k é Tipo 1. Em relação à TCC nas potências de ciclos, Campos e Mello (2004), provaram que a TCC vale quando n é par; e para n ímpar há resultados parciais apontados por Campos e Mello (2004) e Zorzi, Figueiredo e Machado (2020).

Como o número cromático total de algumas potências de ciclos é desconhecido, propomos uma adaptação da técnica de coloração total desenvolvida por Campos e Mello (2004). Esta adaptação gera uma coloração total de um subgrafo gerador da potência de ciclo C_n^k, que será denotado por G_P. São provadas propriedades das listas de cores disponíveis em cada vértice de G_P com a nova coloração.

2 DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

Nesta seção são definidos conceitos básicos da Teoria dos Grafos que são importantes para a compreensão deste estudo. Além disso, são apresentados resultados preliminares que motivaram o desenvolvimento desta pesquisa. Os conceitos básicos são definidos da mesma maneira que em bibliografias clássicas da área de Teoria dos Grafos, como o livro de Bondy e Murty (1976).

Um grafo é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos, A e B, tais que não existem arestas entre vértices do mesmo conjunto. Um grafo H é *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e todo extremo de aresta pertencente a $E(H)$ é um vértice de $V(H)$. Se $V(H) = V(G)$, então H é subgrafo *gerador* de G. Uma *decomposição* de um grafo G em subgrafos é um conjunto de subgrafos de G, G_1, G_2, ..., G_q, tal que a união dos conjuntos de vértices desses subgrafos é o conjunto de vértices $V(G)$ e a união do conjunto de arestas desses subgrafos é o conjunto de arestas $E(G)$. Uma decomposição de um grafo é *disjunta nas arestas* quando $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$, para quaisquer dois subgrafos G_i e G_j da decomposição.

Campos e Mello (2004) apresentaram uma técnica de coloração total para as potências de ciclos que foi utilizada para provar a TCC nesta classe. Esta técnica é descrita no restante desta seção, pois será utilizada para a apresentação dos resultados deste trabalho.

Considere uma decomposição disjunta nas arestas da potência de ciclo C_n^k em dois subgrafos geradores G_P e G_I tais que G_P tem conjunto de arestas $\bigcup_{1 \le i \le \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} E^{2i}$ e G_I tem conjunto de arestas $E(C_n^k) \setminus E(G_P)$. Seja $b = \lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$ e $r = n \bmod (k+1)$. Para provar a TCC, é feita uma coloração total do grafo G_P que depende de uma partição $\mathcal{B} = [B_0, B_1, \ldots, B_{b-1}, B_r]$ do conjunto $V(C_n^k)$), tal que $|B_i| = k+1$ para $0 \le i < b$, e $|B_r| = r$. Para $0 \le i < b$, a parte B_i é definida por $\{v_{i(k+1)+j} : 0 \le j \le k\}$. A parte B_r é definida por $\{v_{n-r}, \ldots, v_{n-1}\}$. O vértice $v_{i(k+1)+j}$ também será denotado por u_j^i, para $0 \le i < b$ e $0 \le j \le k$. No bloco B_r, o vértice v_{n-r+j} é denotado por u_j^r.

Considerando a partição $\mathcal{B}$, a função $\varphi : V(G_P) \cup E(G_P) \longrightarrow \{0, 1, 2, \ldots, k+r-1\}$ define uma coloração total para o grafo G_P. Os vértices de G_P são coloridos de acordo com a equação 1. E as arestas de G_P são coloridas conforme a equação 2. Relembre que $u_j^i = v_{i(k+1)+j}$ para $0 \le i < b$ e $u_j^r = v_{n-r+j}$.

$$\varphi(u_j^i) = \begin{cases} j & \text{se } 0 \le i < b; \\ k+1+j & \text{se } u_j^i \in B_r. \end{cases} \tag{1}$$

$$\varphi(v_\ell, v_{(\ell+2d) \bmod n}) = \varphi(v_{(\ell+d) \bmod n}). \tag{2}$$

Campos e Mello (2004) provam que φ é uma coloração total válida para o grafo G_P e que, quando n é par, G_I é bipartido. Segundo Konig (1916), todo grafo bipartido G tem uma coloração das arestas com $\Delta(G)$ cores tal que quaisquer arestas adjacentes têm cores diferentes. Observa-se que $\Delta(G_I) = 2\lceil \frac{k}{2} \rceil$. Como foram usadas $k+1+r$ cores na coloração de G_P, há $2k+2-(k+r+1) = k-r+1$ cores disponíveis para colorir as arestas de G_I de forma que se garanta a TCC.

Na coloração total de G_P, em cada vértice v_ℓ, foram usadas: uma cor para colorir v_ℓ e mais $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ cores para colorir as arestas incidentes em v_ℓ. Então, cada vértice do grafo C_n^k tem exatamente $k+r-2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ cores disponíveis, dentre as já utilizadas em G_P, que podem ser atribuídas às arestas que nele incidem em G_I. Seja $C(v_\ell)$ o conjunto das cores das arestas que incidem no vértice v_ℓ no grafo G_P mais a cor do próprio v_ℓ. E seja $\overline{C(u_j^i)}$ o subconjunto $\{0, 1, 2, \ldots, k+r\} \setminus C(u_j^i)$.

Campos e Mello (2004) provam que as arestas incidentes em u_j^i no grafo G_I podem ser coloridas com as cores do conjunto $\overline{C(u^i_j)} \cup \{k+r+1, k+r+2, \ldots, 2k+1\}$, sem que haja conflitos de cores, ou seja, de forma que o grafo C^k_n tenha uma coloração total. Como esta coloração total do C^k_n utiliza no máximo $2k+2$ cores, está provada a TCC para esta classe.

3 RESULTADOS

Nesta seção é apresentada uma nova forma de particionar os vértices da potência de ciclo C^k_n para se obter uma coloração total do subgrafo G_P. Em seguida, prova-se que com esta adaptação o conjunto de cores $\overline{C(u^i_j)}$ tem pelo menos um certo número de cores consecutivas, para todo par i, j.

Uma partição é *equilibrada* se a diferença de tamanho entre quaisquer duas partes é no máximo 1. Nesta seção, os vértices serão redistribuídos nas partes B_i, para $0 \leq i < b$ da partição $\mathcal{B}$ de forma que esta se torne uma partição equilibrada e B_r deixe de existir. Sejam $t = \lfloor \frac{r}{b} \rfloor$, $s = r \bmod b$, e $\gamma = k+1+t$. Se $s = 0$, então $|B_i| = \gamma$, para todo i; caso contrário, $s = r \bmod b$ partes têm tamanho $\gamma + 1$ e $b - s$ partes têm tamanho γ.

Seja π a ordem cíclica $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_0)$ dos vértices de $V(C^k_n)$. Particione o conjunto $V(C^k_n)$ em b partes, $B_0, B_1, \ldots, B_b$, tal que as primeiras s partes tenham $\gamma+1$ vértices, tomados consecutivamente a partir de v_0 na ordem π até completar cada parte; e as demais $b - s$ partes tenham γ vértices, também tomados consecutivamente na ordem π até completar cada parte e concluir a partição.

Em cada parte B_i, $0 \leq i < b$, suponha uma ordenação dos vértices que seja uma restrição de π a B_i e renomeie os vértices consecutivamente $B_i = \{u^i_0, u^i_1, u^i_2, \ldots u^i_{|B_i|-1}\}$, $0 \leq i < b$. Assim como em Campos e Mello (2004), pinte cada vértice u^i_j com cor j, $0 \leq i < b$ e $0 \leq j < |B_i|$. Observe que não há vértices adjacentes com a mesma cor, já que a distância entre quaisquer dois vértices de mesma cor é maior ou igual a $k+1$ por construção.

Para cada vértice $u^i_j = v_\ell$, $0 \leq \ell < n$, $0 \leq i < b$ e $0 \leq j < |B_i|$, pinte o conjunto de arestas $\{(v_{(\ell-2p) \bmod n}, v_{(\ell+2p) \bmod n}) : 1 \leq p \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$ com a cor j. Observe que a cor de cada aresta $(v_{(\ell-2p) \bmod n}, v_{(\ell+2p) \bmod n})$ é distinta da cor dos vértices $v_{(\ell-2p) \bmod n}$ e $v_{(\ell+2p) \bmod n}$, já que a distância entre tais vértices e v_ℓ é no máximo k no grafo C_n. Observe também que não existem duas arestas com a mesma cor incidentes em v_ℓ. Caso contrário, existiriam dois vértices com a mesma cor, v_y e v_z, tais que $(\ell - y) \bmod n \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$ e $(z - \ell) \bmod n \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$. Neste caso, $(z - y) \bmod n \leq k$ e, portanto, z e y são adjacentes e não foram coloridos com a mesma cor. Então, o subgrafo de C^k_n que está colorido tem uma coloração total própria. Sejam $\varphi : E(G_P) \cup V(G_P) \to \{0, 1, \ldots, \gamma+1\}$ a coloração total de G_P descrita.

Teorema 3.1 *Seja $v_\ell = u^i_j \in V(C^k_n)$. Então $\overline{C(u^i_j)} \supseteq \{(j + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1) \bmod x, (j + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2) \bmod x, \ldots, (j - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1) \bmod x\}$, onde:*

$$x = \begin{cases} \gamma, & \text{se } \ell < \gamma - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor; \text{ ou se } \ell \geq s(\gamma+1) + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor; \\ \gamma + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, $\overline{C(u^i_j)}$ contém pelo menos t cores consecutivas (operações aritméticas módulo x).

Prova. Considere o grafo G_P com a coloração φ definida nesta seção. Então, foram utilizadas $\max\{|B_i| : 0 \leq i < b\}$ cores. Considere um vértice qualquer $v_\ell = u^i_j$. Nesta demostração, são analisadas as cores das arestas incidentes em v_ℓ. Observe que incidem em v_ℓ as arestas $v_{(\ell-d) \bmod |B_{i-1}|} v_\ell$ e $v_\ell v_{(\ell+d) \bmod |B_i|}$, para todo d par, $2 \leq d \leq k$. A prova se divide em dois casos que dependem da posição de v_ℓ na partição $\mathcal{B}$.

Caso 1: se $i = 0$ e $j < \gamma - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$; ou se $i = s$ e $j \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$; ou se $i > s$. Neste caso, considere todas as operações aritméticas para cálculo das cores tomadas módulo γ. Por construção, cada aresta $v_{(\ell-d) \bmod |B_{i-1}|}v_\ell$ está colorida com a cor $(j - \frac{d}{2})$, para todo d par, $2 \leq d \leq k$. E cada aresta $v_{(\ell+d) \bmod |B_i|}v_\ell$ está colorida com a cor $(j + \frac{d}{2})$, para todo d par, $2 \leq d \leq k$. Como são considerados todos os valores de d pares no intervalo $[2,k]$, o conjunto das cores incidentes em v_ℓ, denotado por $C(u^i_j)$, é $\{(j-1), (j-2), (j-3), \ldots, (j - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)\} \cup \{(j+1), (j+2), \ldots, (j + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)\}$. Além disso, o vértice v_ℓ está colorido com a cor j. Portanto, $\overline{C(u^i_j)}$ contém o conjunto de cores $\{(j + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1), (j + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2), \ldots, (j - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1)\}$. Como $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ arestas incidentes em v_ℓ foram coloridas e uma cor foi usada para colorir v_ℓ, tem-se $|\overline{C(u^i_j)}| \geq \gamma - 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1 = k + 1 + t - 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$. Então, $|\overline{C(u^i_j)}| \geq t$ quando k é par; e $|\overline{C(u^i_j)}| \geq t + 1$ quando k é ímpar. Como as cores usadas em arestas incidentes em v_ℓ são consecutivas, as cores em $\overline{C(u^i_j)}$ também o são (considerando-se operações aritméticas tomadas módulo γ).

Caso 2: Se $i = 0$ e $j \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$; ou se $i = s$ e $j < \gamma - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$; ou se $1 \leq i < s$. Neste caso, considere todas as operações aritméticas para o cálculo das cores tomadas módulo $\gamma + 1$. Por construção, cada aresta $v_{(\ell-d) \bmod |B_{i-1}|}v_\ell$ está colorida com a cor $(j - \frac{d}{2})$, para todo d par, $2 \leq d \leq k$. E cada aresta $v_{(\ell+d) \bmod |B_i|}v_\ell$ está colorida com a cor $(j + \frac{d}{2})$, para todo d par, $2 \leq d \leq k$. Como são considerados todos os valores de d pares no intervalo $[2,k]$, o conjunto das cores incidentes em v_ℓ, denotado por $C(u^i_j)$, é $\{(j-1), (j-2), (j-3), \ldots, (j - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)\} \cup \{(j+1), (j+2), \ldots, (j + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)\}$. Além disso, o vértice v_ℓ está colorido com a cor j. Portanto, $\overline{C(u^i_j)} = \{(j + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1), (j + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2), \ldots, (j - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1)\}$. Como $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ arestas incidentes em v_ℓ foram coloridas e uma cor foi usada para colorir o próprio v_ℓ, $|\overline{C(u^i_j)}| = \gamma + 1 - 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1 = k + t + 2 - 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$. Então, $|\overline{C(u^i_j)}| = t + 1$ quando k é par; e $|\overline{C(u^i_j)}| = t + 2$ quando k é ímpar. Como as cores usadas em arestas incidentes em u^i_j são consecutivas, as cores em $\overline{C(u^i_j)}$ também o são (considerando-se operações aritméticas módulo $(\gamma + 1)$).

Note que, por construção, quando $\ell < \gamma - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$; ou se $\ell \geq (\gamma + 1)(r \bmod b) + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, o Caso 1 é satisfeito. Para os demais vértices, o Caso 2 é satisfeito concluindo a prova. ■

4 CONCLUSÕES

Neste artigo é apresentada uma nova forma de se colorir o subgrafo G_P das potências de ciclo. Provamos que esta nova forma de coloração total tem a propriedade de que t cores consecutivas estão disponíveis em cada vértice para uma coloração das arestas de G_I. Esta propriedade pode ser interessante para futuras investigações sobre a coloração total das potências de ciclos.

AGRADECIMENTOS

Este projeto teve apoio financeiro do CNPq (428941/2016-8).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, S. M. et al. The total coloring of the 3rd and 4th powers of cycles, p. 257–265, 2014. Apresentado no VI Latin American Workshop on Cliques in Graphs.

BEHZAD, M. **Graphs and their chromatic numbers**. 1965. Tese (Doutorado) – Michigan State University, East Lansing, MI.

BEHZAD, M.; CHARTRAND, G.; COOPER, J. K. The colour numbers of complete graphs. **Journal of the London Mathematical Society**, Narnia, v. 1, n. 1, p. 226–228, 1967.

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph theory with applications**. [S.l.]: Macmillan London, 1976. v. 290.

CAMPOS, C. N.; MELLO, C. P. de. A result on the total colouring of powers of cycles. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 18, p. 47–52, 2004.

CAMPOS, C. N.; MELLO, C. P. de. Coloração Total do C^2n. **Trends in Computational and Applied Mathematics**, v. 4, n. 2, p. 177–186, 2003.

CHEW, K. H.; YAP, H. P. Total chromatic number of complete r-partite graphs. **Journal of graph theory**, Wiley Online Library, v. 16, n. 6, p. 629–634, 1992.

FIGUEIREDO, C. M. H. de; MEIDANIS, J.; MELLO, C. P. de. Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. **Information processing letters**, Elsevier, v. 70, n. 3, p. 147–152, 1999.

HOFFMAN, D. G.; RODGER, C. A. The chromatic index of complete multipartite graphs. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 16, n. 2, p. 159–163, 1992.

KONIG, Dénes. Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére. **Mathematikai és Természettudományi Ertesito**, v. 34, p. 104–119, 1916.

ROSENFELD, M. On the total coloring of certain graphs. **Israel Journal of Mathematics**, Springer, v. 9, n. 3, p. 396–402, 1971.

SÁNCHEZ-ARROYO, A. Determining the total colouring number is NP-hard. **Discrete Mathematics**, North-Holland, v. 78, n. 3, p. 315–319, 1989.

VIZING, V. G. The chromatic class of a multigraph. **Cybernetics**, Springer, v. 1, n. 3, p. 32–41, 1965.

YAP, H. P. **Total colourings of graphs, volume 1623 of Lecture Notes in Mathematics**. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 1996.

YAP, H. P.; JIAN-FANG, Wang; ZHONGFU, Zhang. Total chromatic number of graphs of high degree. **Journal of the Australian Mathematical Society. Series A. Pure Mathematics and Statistics**, Cambridge University Press, v. 47, n. 3, p. 445–452, 1989. DOI: 10.1017/S1446788700033176.

ZORZI, A.; FIGUEIREDO, C. M. H. de; MACHADO, R. C. S. **Coloração total em grafos potência de ciclo**. 2020. F. 85–90. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro.