



SEI-SICITE 2021

Pesquisa e Extensão para um mundo em transformação

# Revisão bibliográfica da relação entre fractais nas séries e no Cálculo Numérico

## *Literature review of the relationship between fractals in series and Numerical Calculus*

**Eduarda Machio Belarmino (orientada)\*, Rodrigo Mateus Rychwicki (orientado)†, Dione Ines Christ Milani (orientadora)‡, Gustavo Henrique Dalposso (orientador)§.**

### RESUMO

Este artigo apresenta uma revisão bibliográfica a respeito de sistemas não lineares, fractais e séries. O estudo destes assuntos se mostrou essencial para uma melhor compreensão dos conteúdos abordados nas disciplinas de Cálculo 3 e Cálculo Numérico. O estudo de fractais é de extrema importância para toda a ciência, que hoje pode compreender com muito mais clareza formas geométricas - encontradas na natureza - que já foram ditas como anomalias. A pesquisa realizada foi a quantitativa básica exploratória, revisando literaturas confiáveis que auxiliaram no estudo e na comprovação das hipóteses levantadas durante a elaboração do artigo. Como resultado, foi observada a importância de uma boa base em métodos matemáticos, apresentados em Cálculos 1, 2 e 3 e Cálculo Numérico, para o desenvolvimento de tais descobertas matemáticas. Conclui-se que o estudo dos fractais se mostra essencial para compreensão da ordenação geométrica presente no Universo e abre caminhos para muitas pesquisas em diversos setores da Ciência.

**Palavras-chave:** sistemas não lineares, séries, Cálculo Numérico, Cálculo 1, 2 e 3, interdisciplinaridade.

### ABSTRACT

This article presents a bibliographic review of nonlinear systems, fractals and series. The study of these subjects has proved to be essential for a better understanding of the content covered in Calculus 3 and Numerical Calculus. The study of fractals is extremely important for all of science, which today can understand with much more clarity geometric shapes - found in nature - that were once said to be anomalies. The research carried out was basic quantitative exploratory, reviewing reliable literature that helped in the study and in the verification of the hypotheses raised during the elaboration of the article. As a result, it was observed the importance of a good foundation in mathematical methods, presented in Calculus 1, 2 and 3 and Numerical Calculus, for the development of such mathematical discoveries. It is concluded that the study of fractals is essential to the comprehension of the geometric order present in the Universe and opens paths for many researches in several sectors of Science.

**Keywords:** nonlinear systems, series, Numerical Calculus, Calculus 1, 2 and 3, interdisciplinarity.

\* Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, Paraná, Brasil; belarmino@alunos.utfpr.edu.br

† Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, PR, Brasil; rodrigorychwicki@alunos.utfpr.edu.br

‡ Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, Paraná, Brasil; dioneicmilani@utfpr.edu.br

§ Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, Paraná, Brasil; gustavodalposso@utfpr.edu.br



## 1 INTRODUÇÃO

*“Aqueles que ouvem falar de curvas (irregulares) em tangentes, ou de funções sem derivadas, pensam frequentemente que a natureza não apresenta tais complicações, e nem mesmo as sugere. O contrário, contudo, é verdadeiro, e a lógica dos matemáticos manteve-os mais próximos da realidade do que as representações empregadas pelos físicos (...)”*

(Perrin - começo do século XX)

Diversas culturas divinizaram a ciência da formação da natureza, pois ela possui o princípio da criação de todas as coisas. A Geometria foi considerada sagrada, pois ela é uma expressão da natureza, então estes padrões são padrões literalmente da criação das formas, por isso foram associadas ao divino – a criação. Os fractais formam uma extensa base da geometria sagrada, pois através deles foi possível se entender formas que até o momento da história não tinham uma ordem de formação.

Conforme Mandelbrot (1975), a geometria fractal descreve melhor os fenômenos naturais por fazer uso de seu caráter qualitativo, por visualizar as questões globalmente e contemplar as inter-relações subjacentes.

Na atualidade os estudos sobre os fractais, em especial acerca da dimensão fractal, vêm sendo utilizados em distintas áreas do conhecimento humano, principalmente na utilização de estudos de sistemas caóticos, como no padrão das formações de nuvens e no mercado financeiro. Além da utilização na medição de comprimento de curvas, análise e reconhecimento de padrões de imagens, caracterização de objetos e análise de texturas. (NUNES, 2011)

Iniciamos os estudos com a seguinte pergunta: como relacionar Cálculo 3 com Cálculo Numérico?

O objetivo do artigo é relacionar os estudos de Cálculo Numérico com os estudos de Cálculo 3, além de interpretar e comentar sobre as conclusões ao decorrer da elaboração deste artigo.

## 2 SISTEMAS NÃO LINEARES

Alguma vez você já se perguntou por que quando olhamos o mundo natural ao nosso redor vemos poucas linhas retas, mas ainda assim elas são onipresentes nos sistemas que desenhamos, afinal de edifícios a placas de circuito, elas parecem ser sempre a opção padrão. Uma maneira de entender isso é que os sistemas que desenhamos baseiam-se em uma compreensão científica e matemática do mundo, que inevitavelmente começa por descrever os temas mais simples e mais ordenados, ou seja, aqueles que são compostos de formas e relações lineares. Segundo SAVI (2006), “os sistemas não lineares apresentam uma descrição mais realista dos fenômenos naturais do que os sistemas lineares”. De Euclides a Newton, a ciência tem se concentrado nos sistemas ordenados de triângulos, retângulos perfeitos e relações lineares de causa e efeito que podem ser codificadas em equações compactas. Um exemplo de não linearidade pode ser estar ouvindo duas de suas músicas favoritas ao mesmo tempo, porque existe uma relação de interferência entre elas, os resultados da experiência não serão uma equação simples de adicionar o prazer de ouvir a cada uma independentemente. Assim descrevemos o mundo real como uma espécie de aproximação a estas formas lineares perfeitas.

As funções de interação são um conceito importante dentro da ciência de não linearidade, e foram usadas para criar um novo tipo de geometria denominada geometria fractal, na qual a interação de uma função simples



gera padrões de aparência orgânica irregular que podem modelar muitas das formas geométricas que vem da natureza como por exemplo estruturas de Conchas e formação acidentadas de montanhas. A não linearidade em todas as suas formas, é o coração de muitos dos Desafios do Século 21 para ciência. Principalmente quando tentamos ampliar o nosso conhecimento científico para além da sua dependência da teoria dos sistemas lineares, de forma a encontrar novas maneiras de abraçar o mundo complexo em que vivemos em seus próprios termos irregulares e imperfeitos.

### 3 FRACTAIS

Segundo MANDELBROT (1998), na década de 60, Benoit Mandelbrot, começou a estudar alguns conjuntos irregulares na natureza - caracterizados por serem sistemas não lineares – como galáxias e flocos de neve. Ele conseguiu perceber certos padrões nas irregularidades apresentadas por formas e assim sentiu a necessidade de encontrar um nome para descrever a geometria com que buscava representar as reais formas da natureza. (SANTOS, 1993)

Resumidamente, um fractal é um objeto que não muda sua forma à medida em que a escala é alterada, mantendo-se a sua estrutura idêntica à original. Isto não é o que ocorre com uma circunferência, que reduz a sua curvatura à medida em que é ampliada.

Segundo MURR et al. (2003) a definição dada por K. J. Falconer para ser considerado um Fractal ele precisa possuir todas (ou pelo menos a maioria) das seguintes características:

- Estrutura fina, independente da escala: consiste em detalhamento sucessivo. Infinitas ampliações levam a constantes detalhes, indefinidamente. Nos fractais a cada ampliação aparecem mais detalhes, e o processo pode ser repetido indefinidamente. Para fractais construídos em tela gráfica, os detalhes aparecerão nas ampliações sucessivas, até onde o computador suportar a realização dessas ampliações.
- Não pode ser descrita por uma função analítica simples ou em linguagem geométrica tradicional: o fractal é construído através de processos iterativos, sendo impossível representá-lo por uma função simples.
- Possuir autossimilaridade ou auto-afinidade, mesmo que seja estocasticamente: a autossimilaridade, constitui-se na obtenção de réplicas menores da figura através de sua divisão ou ampliação. Se as réplicas são sempre iguais e obtidas de um fator de redução comum, conclui-se que a figura possui autossimilaridade estrita. Já na auto-afinidade, há figuras obtidas através de transformações afins, isto é, figuras afins.
- A dimensão Fractal deve ser estritamente maior que a sua dimensão topológica: a dimensão Fractal é o espaço que a figura ocupa.

Segundo RABAY (2021), os fractais podem ser agrupados em três categorias principais, estabelecida pelo modo como o fractal é formado ou gerado: sistema de funções iteradas, fractais definidos e fractais aleatórios.

Os fractais também podem ser classificados por sua autossimilaridade. Existem três tipos de autossimilaridade encontrados em fractais: autossimilaridade exata, quase-autossimilaridade e autossimilaridade estatística.



### 3.1 FRACTAIS EM SÉRIES

Algumas séries são conhecidas como séries infinitas, porém o infinito é um grande problema para a física. Imaginar algo que seja infinito em um determinado espaço (universo), parece impossível. Mas isso pode ser explicado pelos fractais, pois ele se repete, em infinitas escalas, em um espaço determinado. Portanto o estudo dos fractais pode abrir novas portas para o entendimento do infinito.

## 4 RESULTADOS

Como resultado de nossa pesquisa inicial - como relacionar Cálculo 3 com Cálculo Numérico - descobrimos os fractais, que se relacionam por serem um sistema não linear e derivarem de uma série. Um fractal é sistema no qual a interação de uma função simples gera padrões de aparência orgânica irregular que se modelam como formas geométricas da natureza, além de se derivar de uma série, que se deriva da soma de sequências, como por exemplo a sequência de Fibonacci, que através de suas sucessões é encontrada no fractal da concha de caracol do mar - essa forma geométrica se assemelha as linhas do campo vetorial de um grande problema da física clássica, a turbulência -. Ao final da pesquisa ficou evidente a necessidade dos conhecimentos adquiridos nas disciplinas de Cálculo Numérico e Cálculo 3 para o desenvolvimento da ciência e para resolução de problemas pertinentes, uma vez que os fractais só puderam ser descobertos graças ao avanço dos conhecimentos em sistemas não lineares e principalmente dos conhecimentos em séries e sequências.

## 5 CONCLUSÃO

Segundo ASSIS (2008), o conceito de dimensão fractal vem sendo utilizado em diversos campos: na medicina, na detecção de núcleos atípicos, na mineralogia, na linguística, na biologia, na indústria, no solo, na chuva, na economia, na ecologia, na computação, entre outros. Segundo SENA (2018), o estudo da geometria fractal deveria ser abordado desde o ensino fundamental.

Com a revisão bibliográfica realizada e com o auxílio dos orientadores conseguimos relacionar os conteúdos de Cálculo 3 com os de Cálculo Numérico, através dos fractais. Além disto notasse que um estudo mais aprofundado do assunto poderia ajudar a resolver problemas pertinentes na física, como por exemplo, a turbulência, que foi considerada por Richard Feynman como o problema mais importante ainda não resolvido da física clássica. Um estudo aprofundado dos fractais pode ser a chave para desenvolver-se algoritmos que possam prever turbulência, computacionalmente, uma vez que possuem forte semelhança com os espirais de Fibonacci, que geram fractais, como os da Figura 1. Assim poderíamos ter previsões de tempo com menos erros, testes de túneis de vento poderiam ser substituídos por testes computacionais, gerando enormes benefícios econômicos. Assim, utilizando da junção de conhecimentos de Cálculo 3 e Cálculo Numérico, poderíamos desenvolver ainda mais nossas tecnologias.



**Figura 1 – Fractal em espiral - caracol**



**Fonte: REYES (2011)**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Universo por nos proporcionar saúde e esperança nesta jornada de aprendizado.  
A esta Universidade que oportuniza o vislumbre de um mundo melhor.  
A professora Milani que nos encantou com os fractais.  
Ao professor Dalosso que nos auxiliou no encontro das informações  
E a todos que contribuem para nossa formação.

## **REFERÊNCIAS**

ASSIS, Thiago Albuquerque de; MIRANDA, José Garcia Vivas; *et al.* Geometria Fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Scielo Brasil**, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia. Salvador, BA, Brasil. Revista brasileira de ensino de física, v. 30, n. 2. 2008. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/NkxTkgKJJdBX6Zy95zWHZkG/?lang=pt>. Acesso em: 15 de agosto de 2021.

Experimento A0: Fractais. **Universidade Federal do Espírito Santo**, Departamento de Física – CCE, Física Experimental Roteiro. Disponível em: [https://fisica.ufes.br/sites/fisica.ufes.br/files/field/anexo/roteiro\\_com\\_artigoderevisao\\_0.pdf](https://fisica.ufes.br/sites/fisica.ufes.br/files/field/anexo/roteiro_com_artigoderevisao_0.pdf). Acesso em 17 de agosto de 2021.



SEI-SICITE 2021

Pesquisa e Extensão para um mundo em transformação

- FUZZO, Regis Alessandro; REZENDE, Veridiana; *et al.* **Fractais: Algumas Características E Propriedades. IV Encontro de Produção Científica e Tecnológica –EPCT.** Núcleo de Pesquisa Multidisciplinar. Faculdade Estadual de Ciência e Letras de Campo Mourão. 2009. Disponível em: [http://www.fecilcam.br/nupem/anais\\_iv\\_epct/PDF/ciencias\\_exatas/10\\_FUZZO\\_REZENDE\\_SANTOS.pdf](http://www.fecilcam.br/nupem/anais_iv_epct/PDF/ciencias_exatas/10_FUZZO_REZENDE_SANTOS.pdf). Acesso em 25 de agosto de 2021.
- MANDELBROT, Benoit. **Objectos fractais.** Editora Ciência Aberta Gradiva. Tradução Carlos Fiolhais e José Luís Malaquias Lima, 3. ed. Lisboa. 1998.
- MANDELBROT, Benoit. **The Fractal Geometry of Nature.** Nova Iorque. Editora: Times Books, W.H. Freeman and Company. 1975.
- MEIRELES SENA, Maxwell. Uma proposta de ensino da geometria fractal para o 9º ano do ensino fundamental. **Universidade Do Estado Do Amazonas.** Manaus. 60 p. 2018. Disponível em <http://repositorioinstitucional.uea.edu.br/handle/riuea/1397>. Acesso em 15 de agosto de 2021.
- NUNES, João Cavalcante; SILVA, Julizete da; *at al.* **Fractais: uma análise da importância desse conhecimento geométrico para a humanidade. Faculdade Madre Tereza.** Santana-AP. 2011. Disponível em: <https://www.webartigos.com/storage/app/uploads/public/588/508/32b/58850832b07d9133614671.pdf>. Acesso em 5 de setembro de 2021.
- RABAY, Yara Silvia Freire. Estudo e Aplicações da Geometria Fractal. **Repositório Institucional da Universidade Federal da Paraíba,** Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. João Pessoa/BA. 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7651>. Acesso em 21 de agosto de 2021.
- REYES, Alejandro. **Espiral Caracol.** Fractal Poster. 2011. Disponível em: [https://www.fractalposter.com/fractals/espiral\\_caracol\\_p-2208.html](https://www.fractalposter.com/fractals/espiral_caracol_p-2208.html). Acesso em 9 de setembro de 2021.
- SANTOS, Lúcio Tunes dos. **Sistemas não Lineares e Fractais.** Matemática Universitária, nº15. Páginas 102-116. 1993.
- SAVI, Marcelo Amorim. **Dinâmica não-linear e Caos.** Editora e-papers. Cap. 1, p. 25-49. Rio de Janeiro. 2006. Disponível em: [https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=AlKlJk9zz0oC&oi=fnd&pg=PA21&dq=Sistema+n%C3%A3o+linear+\(Sistema+din%C3%A2mico+n%C3%A3o+linear\)&ots=iknFKz37Bf&sig=cYRcDeO\\_mORukrJahScrEm7EmuY#v=onepage&q&f=true](https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=AlKlJk9zz0oC&oi=fnd&pg=PA21&dq=Sistema+n%C3%A3o+linear+(Sistema+din%C3%A2mico+n%C3%A3o+linear)&ots=iknFKz37Bf&sig=cYRcDeO_mORukrJahScrEm7EmuY#v=onepage&q&f=true). Acesso em: 19 agosto 2021.