Otimização e análise de controladores H2

OPTIMIZATION AND ANALYSIS OF H2 CONTROLLERS

Lucas de Brito **Cristiano Marcos Agulhari**.

RESUMO

A utilização de um algoritmo genético, implementado por ferramentas de matemática computacional, é proposta para reduzir a dificuldade que se tem em definir os conjuntos de matrizes responsáveis por descrever métricas de desempenho, desejadas na síntese de um controlador, quando se utilizam técnicas baseadas na norma H2. O critério de desempenho em que o projeto se fixa (função objetivo do algoritmo) para otimização, neste projeto, é a velocidade de estabilização do sistema. Partindo desse princípio, são sorteados aleatoriamente diversos valores chamados de indivíduos, que compõem as matrizes desejadas, e que serão refinados de acordo com a sua eficiência em cada ciclo do algoritmo, sendo o mesmo baseado no cálculo da minimização da norma H2 utilizando Inequações Matriciais Lineares. Os resultados obtidos são apresentados, e então discutidos por meio da observação da convergência dos valores da função objetivo, tentando descobrir se com essa técnica é possível adquirir com proximidade a condição ótima do sistema em estudo. E por fim conclui-se qual a viabilidade da abordagem promovida.

Palavras-chave: otimização, desempenho, controladores, norma H2.

ABSTRACT

The use of a genetic algorithm, implemented by computational mathematics tools, is proposed to reduce the difficulty in defining the sets of matrices responsible for defining performance metrics, desired in the synthesis of a driver, when using based techniques in the H2 standard. The performance criterion in which the project is fixed (objective function of the algorithm) for optimization, in this project, is the speed of stabilization of the system. Based on this principle, several values called patterns are randomly drawn, which make up the desired matrices, and which will be refined according to their efficiency in each cycle of the algorithm, which is based on the calculation of the minimization of the H2 norm using Linear Matrix Inequalities. The obtained results are necessary, and then discussed through the observation of the convergence of the objective function values, trying to find out if with this technique it is possible to acquire the optimal condition of the system under study. And finally, it concludes to qualify the viability of the promoted approach.

Keywords: optimization, performance, controllers, H2 norm.

Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil; lucasbrito@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio; agulhari@utfpr.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Ao tratar de controle de sistemas, dependendo de qual for a situação, um pequeno erro pode resultar em uma catástrofe, como por exemplo a explosão de uma usina nuclear. Dito isso, pode-se afirmar que garantir o desempenho de um dado sistema é extremamente importante, e buscar a solução ótima para isso, se torna um ponto muito interessante, principalmente com o avanço da tecnologia. Segundo Henrique et al.,

> O desenvolvimento de importantes ferramentas teóricas juntamente com o uso de computadores digitais possibilitou a introdução de diversas melhorias sobre a estrutura de controle automático, buscando manter a estabilidade do processo sob quaisquer condições, mesmo na presença de desvio planta/modelo ou com ruídos de medidas e visando ainda a melhoria no desempenho da malha fechada. (2007)

Para isso, existem duas alternativas bastante conhecidas, chamadas de Regulador Quadrático Linear (LQR) e Síntese de norma H2. Ambas as técnicas possuem o mesmo objetivo, otimizar o controle do sistema de acordo com os critérios de desempenho definidos, em termos do compromisso entre velocidade de resposta e energia de controle, que são critérios conflitantes. A questão que separa as duas técnicas é a capacidade de lidar com incertezas e perturbações. No caso, o uso da síntese de norma H2 permite que se trabalhe com esses ruídos, e ainda garanta o desempenho esperado do sistema. Para Santos (2005, p.14) [...] o problema de controle H2 / H∞ tem como objetivo o projeto de controladores que proporcionem, em malha fechada, um compromisso entre os critérios de desempenho e de margem de estabilidade.

A questão então é a seguinte, como pode-se contornar a dificuldade que se tem em definir as matrizes que irão descrever e garantir as métricas de desempenho de um sistema mais complexo? Segundo Langner

> [...] partindo-se do princípio que os problemas a serem resolvido são suficientemente complexos, a ponto de dificultar uma formulação matemática abrangente e o atendimento de requisitos básico de tratabilidade por ferramentas convencionais, a abordagem a partir da computação evolutiva torna-se atraente, já que a aplicação de técnicas de solução conhecidas, dedicadas e capazes de garantir a obtenção de uma solução ótima, não é possível nestes casos. (2004)

Dessa forma, destaca-se que, utilizar artifícios matemáticos, probabilísticos e computacionais para definir com maior assertividade essas matrizes é uma opção. A técnica estudada neste projeto, permite avaliar a eficiência de algumas matrizes, testando resultados de uma função com diversos valores aleatórios, até que se selecione o grupo de valores desejado. Sendo assim, se irá obter as matrizes de ponderação a partir do objetivo proposto (como tempo de resposta ou máximo sobressinal) e isso permitirá avaliar como tais matrizes afetam estes critérios. Uma explicação mais profunda e teórica desse algoritmo pode ser observado em Langner (2004, p. 59-77).

2. MÉTODO

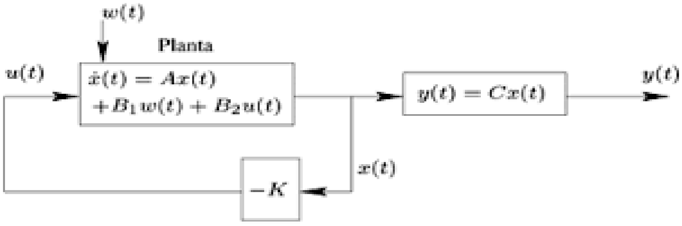
Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil; lucasbrito@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio; agulhari@utfpr.edu.br

Tomando como problemática as dificuldades citadas anteriormente, é proposto neste trabalho o uso do algoritmo genético para auxiliar na decisão das matrizes de desempenho que serão utilizadas para controlar o sistema. Para desenvolver os cálculos matemáticos por trás de toda teoria, será utilizado um software desenvolvido para computação matemática. Os detalhes referentes aos métodos e cálculos realizados serão explanados a seguir nesta seção

2.1. Controle por realimentação de estados

Primeiramente, deve-se entender sobre como funcionará a otimização do controle utilizando o processo de controle de um sistema em malha fechada. Para isso foi utilizada a técnica de realimentação de estados, trabalhando sobre um ganho K necessário para estabilização do sistema. Segue um exemplo na Fig.1 de como funciona essa técnica:

Figura 1 - Exemplo de um sistema em malha fechada



Fonte: Assunção et al., 2004

Na Figura, u(t) (definido por -K.x(t)) é a entrada do sistema, o bloco "Planta" remete aos estados do sistema descritos no espaço de estados, x(t) é a resposta dos estados que vão realimentar o sistema, y(t) é o que define a sua saída, e por último o K, chamado de ganho, que é um valor que será inserido como um sinal de entrada no sistema tendo como função estabilizá-lo.

Esse valor K pode ser obtido de diversas maneiras e isso pode ser verificado em Leite et al. Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica [online]. 2004, v. 15, n. 2. Neste trabalho é aplicado o teorema de Lyapunov que é demonstrado em Hafstein (2004), que diz que se houver uma função chamada de Função de Lyapunov Candidata, utilizada para se medir a energia do sistema, e a mesma for continuamente diferenciável e decrescente, então esse sistema é assintoticamente estável. No caso de SLITs (Sistemas Lineares Invariantes no Tempo), pode-se dizer que ele é assintoticamente estável, se, e somente se, dada uma matriz $Q = Q^T > 0$ a equação de Lyapunov $A^TP + PA = -Q$ tenha como solução uma matriz $P = P^T > 0$. Para aplicar essa situação a um sistema, vamos assumir a função candidata como $V(x) = x^TPx$. Portanto sendo o sistema $\frac{dx(t)}{dt} = Ax$, temos:

$$x^T(A^TP + PA)x < 0 \qquad (1)$$

$$A^TP + PA < 0 \qquad (1.1)$$

$$-Q < 0 \qquad (1.2)$$

Quando se trata de um sistema em malha fechada controlado por um ganho de realimentação de estados,

Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil; lucasbrito@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio; agulhari@utfpr.edu.br

sua equação de estados é um pouco diferente, sendo necessário eliminar uma bilinearidade e fazer algumas adaptações matemáticas para se obter a seguinte LMI (Linear Matrix Inequality ou Desigualdade de Matriz Linear):

$$WA^{T} + Z^{T}B^{T} + AW + BZ < 0 \tag{2}$$

Sendo $W = W^{T} = P = P^{T} > 0$ e $Z = KW$, portanto para calcular K, basta resolver essa LMI e no final calcular $K = ZW^{-1}$.

2.2. Norma H_2

Na matemática uma norma está ligada a um valor estritamente real e positivo, normalmente relacionado a valores de comprimento, é bastante conhecido na geometria, onde é mais chamado de módulo, utilizado para calcular o comprimento de vetores. Dentro do projeto, esse conceito se aplica na necessidade de se medir a energia gasta. Quando se calcula a Norma H2 de um sistema, pode-se dizer que está obtendo o resultado da energia média da resposta ao impulso. Sua fórmula é a seguinte $\|H(s)\|_2^2 = \int_0^{\infty} |h(t)|^2 . dt$.

Para um sistema com as seguintes características:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + B_w w \tag{3}$$

$$z = C_z x + D_{zu} u \tag{4}$$

Temos que a norma H_2 desse sistema é dada pelo traço: $Tr(C_z P_c C_z^{T})$. Sendo a matriz P_c, semelhante ao gramiano de controlabilidade, descoberta por meio do cálculo da LMI definida pela equação de Lyapunov:

$$AP_c + P_c A^{T} + B_w B_w^{T} \leq 0 \tag{5}$$

Quando se trata de interpretações em relação à energia, as matrizes C_z e D_{zu} tem um impacto bem definido. Quanto maior for a primeira das matrizes, mais rápido o sistema irá se estabilizar, gastando mais energia, e para a segunda delas, o sistema inverso. Note, portanto, que ambos os objetivos são conflitantes. Porém, quando a observação se concentra em outro contexto, como por exemplo, a minimização de sobressinal, a configuração que essas matrizes devem apresentar para que tais critérios sejam otimizados, ao minimizar a norma H2, não é tão trivial de entender. Para isso, pode-se utilizar algum algoritmo para otimizar os critérios estudados, fazendo com que se tenha maior conhecimento de como é o comportamento do sistema em relação a elas, e que se garanta um resultado esperado.

Ao se tratar de sistemas que apresentam elementos com incertezas ou ruídos, é comum, por ser consideravelmente mais interessante, utilizar condições LMIs que são equivalentes às apresentadas anteriormente definidas pelo Lema de Finsler, pelo fato delas oferecerem um menor conservadorismo. Condições essas, cuja demonstração pode ser encontrada em Oliveira, R.C.L.F. and Peres, P.L.D. (2008).

Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil; lucasbrito@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio; agulhari@utfpr.edu.br

2.3. Algoritmo genético

O algoritmo genético se concentra na execução de três passos, sendo eles, os passos de: Seleção, Cruzamento e Mutação, cada um deles contendo alguns procedimentos para sua execução. Resumindo, a função do algoritmo é buscar em uma população inicial os indivíduos que atendem aos requisitos definidos, e que garantem a minimização e desempenho esperado do sistema.

Neste trabalho, os indivíduos são compostos pelos elementos das matrizes C_z e D_{zu}, que ponderam o problema da norma H2. Deve-se inicialmente definir a população inicial, que no caso serão 100 indivíduos de 6 elementos cada, configurados em forma de vetor, como por exemplo $[x1,\ x2,\ x3,\ x4,\ x5,\ x6]$. Uma vez definidos, seguirá os passos citados do algoritmo, que podem ser encontrados em Wang (2003).

E então, será realizada uma bateria de execuções, sendo que, o critério de parada será definido pelo usuário, nesse caso foi um número máximo de ciclos realizados, mas também poderia ser, uma análise de alterações do valor da função objetivo por exemplo.

3. RESULTADOS

Buscando fazer uma análise da eficiência do algoritmo, foram realizadas 10 execuções do script completo, buscando descobrir os valores das matrizes C_z e D_{zu} que otimizam o tempo de estabilização do sistema. Os resultados obtidos de cada elemento dessas matrizes estão apresentados na Tab. 1, juntamente com o K que resulta quando se calcula as LMIs com esses valores e com o valor da função objetivo (Fobj), que seria o tempo de estabilização:

Tabela 1 - Valores das matrizes C_z e D_{zu} retornados pelo algoritmo e do K calculado.

Cz[1,1]	Cz[1,2]	Cz[2,1]	Cz[2,2]	Dzu[1,2]	Dzu[2,2]	K		Fobj
4,1566	-10,9038	6,9432	-13,8938	-0,4767	-0,7488	-7,9806	-11,9745	0,6000
-2,4392	1,7084	4,0597	-7,1776	0,2674	-0,5575	-15,3226	-46,1395	1,5000
-0,3750	7,4272	-4,6928	1,3032	0,9191	-0,3341	-11,2797	-27,9038	0,9000
2,4867	-7,0676	5,5672	-7,7666	-0,1357	-0,4673	-19,9176	-69,6680	0,7000
13,5984	-17,0030	-0,0504	-14,7296	-1,2304	-0,7110	-16,7844	-53,4226	0,7000
-1,4076	3,8315	-0,9382	4,0098	0,1277	-0,0039	-21,7342	-94,9084	0,5000
-3,0825	5,2980	-2,9892	1,5662	0,5755	0,6634	-12,8345	-32,4203	1,0000
-1,8626	3,0048	0,2318	2,8384	1,7262	0,4895	-8,9522	-16,9369	1,5000
-1,7550	-1,3144	1,0975	-9,0257	-0,2368	0,0150	-19,3100	-72,4118	0,6000
0,7934	3,0240	7,6061	-10,1488	0,2981	-0,8494	-15,9717	-47,9380	0,8000

Fonte: Autoria própria (2021).

Analisando esses dados pode-se deduzir que apesar das diferenças visíveis, os valores se aproximam em diversas situações, o que demonstra que o algoritmo converge para o mesmo ponto na maioria das vezes, ou seja, que ele vai acabar encontrando indivíduos normalmente próximos em valor que fazem com que a função objetivo convirja a um valor específico. Nesse caso podemos notar um *range* de 0,6 a 1,5. Em relação à proporção pode-se observar que a maioria dos valores obtidos para a matriz C_z são maiores que os da D_{zu}, o que nos remete que quando se deseja otimizar um sistema, a proporção das matrizes C_z e D_{zu} considerando o

Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil; lucasbrito@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio; agulhari@utfpr.edu.br

Teorema de Lyapunov, vai determinar o seu comportamento. De fato, este comportamento é esperado, uma vez que maiores valores em C_z implica em uma maior velocidade de resposta do sistema, portanto menores valores para o tempo de estabilização, mostrando que a técnica é promissora.

4. CONCLUSÃO

Levando em consideração a então discussão feita sobre os resultados obtidos, pode-se dizer que ao buscar a otimização do tempo para estabilização desse sistema, se notará que a matriz C_z será proporcionalmente maior que a D_{zu}, sendo assim, quanto maior essa proporção, mais otimizado será esse fator. Também pode-se dizer que o algoritmo escrito está atendendo aos requisitos de otimização, e nele pode-se observar uma tendência de valores. Ou seja, o conhecimento agregado é que, de fato, essa técnica é funcional, e que o uso da computação por meio de algoritmos matemáticos ajuda muito ao assegurar um desempenho de controle para sistemas mais complexos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) pelo fomento da pesquisa, e ao meu professor orientador por ter me indicado à bolsa e me instigado a realizar este trabalho.

REFERÊNCIAS

Assunção, Edvaldo et.al. **Controle ótimo H2 e H∞ com modificação de zeros para o problema de rastreamento usando LMI.** Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática v. 15, n. 4, 2004.

Oliveira, R.C.L.F. and Peres, P.L.D. **A convex optimization procedure to compute ℋ2 and ℋ∞ norms for uncertain linear systems in polytopic domains.** Optim. Control Appl. Meth., 29: 295-312., 2008

CHF Silva, HM Henrique, LCO Lopes, LR Gomes. **Controle preditivo robusto baseado em inequações matriciais lineares aplicado a máquinas síncronas.** - Revista Ciências Exatas, 2007.

Langner, C.G. **Síntese de controladores H2 e H∞ para sistemas sujeitos a incertezas e/ou restrições no domínio do tempo.** PUCPR, 2004

Leite, Valter Júnior de Souza, Montagner, Vinícius Foletto e Peres, Pedro Luis Dias. **Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros.** v. 15, n. 2 Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica . 2004.

Sigurdur Freyr Hafstein. **A constructive converse Lyapunov theorem on exponential stability. Discrete & Continuous Dynamical Systems**, Duisburg, 2004

Wang SC. **Genetic Algorithm. In: Interdisciplinary Computing in Java Programming. The Springer International Series in Engineering and Computer Science**, vol 743. Springer, Boston, MA., 2003

Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil; lucasbrito@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio; agulhari@utfpr.edu.br