



SEI-SICITE 2021

Pesquisa e Extensão para um mundo em transformação

XI Seminário de Extensão e Inovação
XXVI Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica
08 a 12 de Novembro - Guarapuava/PR



MODELAGEM BASEADA EM GRAFOS PARA SISTEMAS DE CONTROLE DESCRITOS POR ESPAÇOS DE ESTADOS

GRAPH-BASED MODELING FOR CONTROL SYSTEMS DESCRIBED BY STATE SPACES

Felipe Augusto Stark (orientado) *, Prof. Dr. Daniel Cavalcanti Jeronimo (orientador) †

RESUMO

Neste trabalho é proposto um método baseado em grafos para representar sistemas de controle descritos por espaços de estados. Para tal finalidade, utiliza-se o estudo de estruturas topológicas de grafos, associando com a teoria de controle moderno, para enfim tratar através de uma proposta de modelagem digital a dificuldade de representação de sistemas controlados em termos de complexidade de implementação, adaptabilidade do sistema e também eventuais problemas construtivos dos equipamentos e protótipos utilizados. Os resultados apresentam a análise do estudo de caso de um processo de controle representado na forma de grafos. São apresentados também resultados comparativos do controlador LQR, *Linear Quadratic Regulator*, comparados com a proposta de controle na representação de grafo. As comparações utilizam métricas de avaliação de variação de controle, erros absolutos e quadráticos. Conclui-se que o método de análise e controle por meio de grafos é capaz de representar a dinâmica de um sistema descrito em espaço de estados, possibilitando aplicar os conceitos de controle moderno. Os resultados obtidos utilizando uma granularidade de 5 subespaços no espaço de fase evidenciaram melhora nas avaliações de energia de controle e piora na avaliação de seguimentos de referência.

Palavras-chave: Grafo. Espaço de estados. Controle digital.

ABSTRACT

In this work, a graph-based method is proposed to represent control systems described by state spaces. For this purpose, it is used the study of graph topological structures, associated with the theory of modern control, to finally treat through a digital modeling proposal the difficulty of representing controlled systems in terms of implementation complexity, adaptability of the system and also possible constructive problems of equipment and prototypes used. The results present the case study analysis of a control process represented in graph form. Comparative results of the LQR controller, *Linear Quadratic Regulator*, compared to the proposed control in graph representation are also presented. The comparisons use metrics for evaluating control variance, absolute and quadratic errors. It is concluded that the graph analysis and control method is capable of representing the dynamics of a system described in state space, making it possible to apply modern control concepts. The results obtained using a granularity of 5 subspaces in the phase space showed improvement in the control energy evaluations and worsening in the reference follow-ups evaluation.

Keywords: Graph. Space states. Digital control.

*  Departamento de Engenharia de Computação, Bacharelado em Engenharia de Computação; ✉ felipeaugustostark@gmail.com.

†  Departamento de Engenharia de Computação, COENC, Bacharelado em Engenharia de Computação; ✉ danielc@utfpr.edu.br.



1 INTRODUÇÃO

Com o passar do tempo, o processo de controle se tornou mais sofisticado. O desenvolvimento de métodos como: resposta em frequência e lugar geométrico das raízes possibilitou que engenheiros projetassem sistemas de controle linear satisfazendo de forma razoável um determinado conjunto de desempenho, compondo a teoria clássica de controle. (OGATA, 2011).

Os métodos clássicos tornaram-se insuficientes à medida que os sistemas passaram a envolver múltiplas variáveis de entrada e saída, porém o desenvolvimento de computadores digitais tornou possível a análise de sistemas diretamente no domínio do tempo através de equações diferenciais, relacionando as múltiplas variáveis não representadas anteriormente, dando origem à teoria de controle moderno, amplamente utilizada no estado da arte da engenharia de sistemas dinâmicos (OGATA, 2011). A contribuição da computação digital ainda concebeu a representação de estruturas de dados computacionais, que são informações organizadas em dispositivos de memória de forma que podem ser processadas por outras unidades do computador (REIS, 2017). Uma dessas estruturas de dados são os grafos. Grafos são estruturas matemáticas de vértices e arestas que representam um conjunto de informações e dados, expressando como transcorre o relacionamento dos elementos de tal conjunto (RIBEIRO, 2012). Tais estruturas representam uma grande quantidade de relações no mundo real, como mapas entre cidades, conexões numa rede social, e na abordagem aqui levantada representam estados de um sistema de controle.

2 MÉTODO

O método proposto neste trabalho consiste em relacionar a representação de um processo em espaço de estados e a teoria de grafos, deste modo, é proposto um método computacional de controle de sistemas.

Um processo descrito no espaço de estados associa p entradas com q saídas, de forma que o estado de controle do processo é representado por essas variáveis, ou seja, o espaço de estados é o espaço cujos eixos são as variáveis de estado (NISE, 2011). Associando essa definição a teoria de grafos, que permite representar estruturas interligadas e também percorrer essas estruturas através de uma função que relaciona seus vértices, é construído o modelo de um processo descrito por seus estados através de um grafo. Com essa representação realizada é possível operar no grafo através de técnicas como buscas em grafo, a fim de percorrer estados de controle e traçar caminhos ótimos do atual ao estado objetivo.

Este objetivo é atingido quando definem-se os estados objetivo e o espaço de operação do processo, que representa um subespaço do retrato de fase, em seguida, suas variáveis são representadas por meio de vértices e arestas formando uma estrutura topológica de grafos, para, por fim, através de operações nessa estrutura realizar o processamento de dados e as ações de controle no sistema.

Para prosseguir com essa representação é necessário definir qual é a entrada de controle que aplicada no sistema no estado S_k muda o sistema para o estado S_{k+1} . Esta ação é calculada para todos os pares de estados do sistema, estes valores são atribuídos às arestas do grafo, que por sua vez conectam os vértices.

O processo de cálculo de um par $[S_k, S_{k+1}]$ consiste na relação descrita pela Equação 1:

$$S_{k+1} = f(S_k, u). \quad (1)$$

O valor final de u é obtido considerando a minimização da função geradora de S_{k+1} através do método de



Basin-Hopping, aplicado ao erro médio quadrático entre todos os pares (i, j) de possíveis estados do processo discretizado. O valor de MSE, *Mean Squared Error*, indica a proximidade do estado resultante da função de transição para com o estado objetivo, portanto, um MSE nulo indica que o estado calculado é de fato o estado objetivo.

Após construído o grafo que represente o processo de controle, operações comuns a estrutura de dados podem ser aplicadas, a fim de sustentar o processo de controle. Estas operações tornam este processo mais sofisticado, permitindo gerar, por exemplo, subgrafos de estados representando subsistemas e encontrar caminhos mínimos para atingir os estados estacionários do sistema.

Os métodos que foram utilizados nesta pesquisa são buscas em grafos, especificamente o algoritmo de Dijkstra para a busca por caminho mínimo. Considerando-se os pontos de operação em algum instante de controle e o da referência faz-se necessário resolver um problema de controle global para se determinar quais pontos de operação do sistema devem ser atingidos. Esse processo é análogo ao conceito de janelas deslizantes dos controladores preditivos baseados em modelo (CAMACHO; BORDON, 2007). A busca por caminho mínimo considera em sua heurística as arestas como peso, que são as ações de controle.

2.1 Métricas avaliativas

Para quantificar o desempenho da representação de sistemas de controle representados em grafos e comparar com a tradicional representação em espaço de estados é necessário estabelecer quais critérios serão contabilizados na análise. Inicialmente foram definidas quatro métricas. TVC: *Total Variation of Control*; ISE: *Integral of Squared Error*; IAE: *Integral of Absolute Error*; ISU: *Integral of Squared Control*.

$$TVC = \sum_{k=0}^k | \Delta u(k) | . \quad (2)$$

$$ISE = \sum_{k=0}^k (r(k) - x(k))^2. \quad (3)$$

$$IAE = \sum_{k=0}^k | r(k) - x(k) | . \quad (4)$$

$$ISU = \sum_{k=0}^k u^2(k). \quad (5)$$

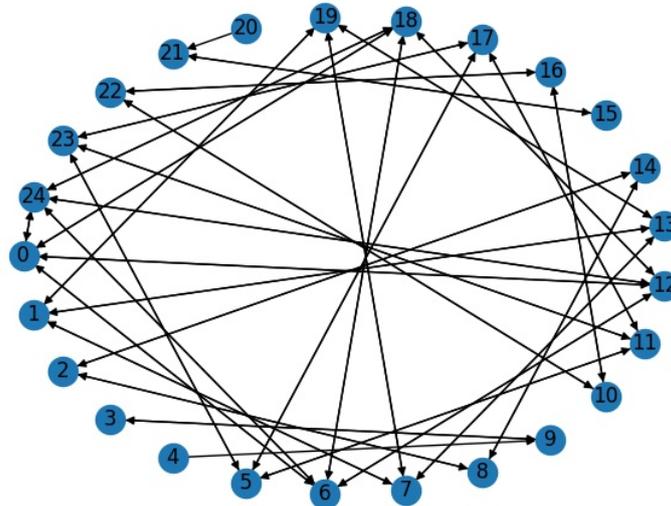
3 RESULTADOS

Considerando o sistema não linear descrito na Equação 6 primeiramente é definido o seu limite de operação na região do eixo x entre $[0, 1]$ e no eixo y também entre $[0, 1]$. Para fins de teste, considerou-se um *time step* de $0.1s$ e uma granularidade de 0.25 , com base nesses valores foi então gerado um total de 25 estados, resultantes da combinação dos pontos $x_1 = [0, 0.25, 0.5, 0.75, 1]$ e $y_2 = [0, 0.25, 0.5, 0.75, 1]$. Feito isso, é calculado para cada par $[S_i, S_j]$ a energia de controle necessária para a transição de estados.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x^2(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u^3(t). \quad (6)$$

A partir das transições, é gerado o grafo que representa o processo, a Figura ?? ilustra essa topologia.

Figura 1 – Grafo de estados resultante do sistema linear.

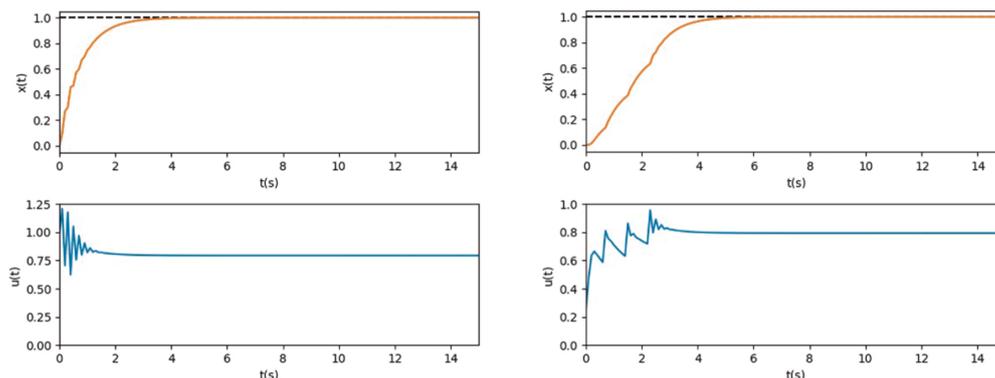


Fonte: O autor (2021).

Para exemplificar a operação no sistema não linear foi selecionado o estado S_{24} como estado objetivo do processo, para que seja aplicado o algoritmo de Dijkstra neste modelo em busca do caminho ótimo para tal estado. Essa busca retorna o caminho $[S_0, S_6, S_{12}, S_{18}, S_{24}]$.

Na Figura 2 é apresentado o resultado de controle do sistema não linear utilizando o método de controle baseado em grafos com as transições dos caminhos dadas por um controlador LQR.

Figura 2 – Gráfico de saída resultante do processo não linear controlado por um controlador LQR puro (esquerda) e o processo controlado pelo mapeamento em grafos com seus estados intermediários controlados por um LQR puro (direita).



Fonte: O autor (2021).

A tabela em sequência evidencia os resultados das medidas avaliativas propostas.

Efetuadações de controle no processo não linear representado em grafos observa-se inicialmente um valor menor de TVC em comparação com o controlador LQR puro, fato que impacta positivamente na evolução do processo, este parâmetro indicou uma melhora de 62% no controle LQR. Esta melhora é consequência de uma menor energia de controle aplicada ao sistema quando transiente para o estado objetivo. O fato de haver uma menor energia aplicada é resultado do processo de operação em grafos, mais especificamente da ação de busca por caminhos mínimos de Dijkstra.



Tabela 1 – Métricas avaliativas para o controlador LQR e o sistema não linear representado em grafo.

	TVC	ISU	IAE	ISE
LQR - Grafo	1.969	0.297	38.331	26.226
LQR - Puro	3.178	1.200	15.832	8.489

Fonte: O autor (2021).

Apesar de haver uma piora numérica no valores de IAE e ISE de aproximadamente 253% e 325% para o controle LQR, esta variação pode ser analisada como algo esperado e que não indica necessariamente um desempenho inferior, já que esse comportamento pode ser justificado pela existência de mais estados intermediários entre o início e o objetivo, ou seja, não há uma mudança direta do estado inicial para o objetivo como ocorre no controle tradicional, o que há é uma minimização em termos de custo da ação de controle, mesmo que isso implique em um trânsito por mais estados. O mesmo raciocínio é válido para a interpretação do ISE.

Uma observação que sustenta o desenvolvimento anterior é que ao visualizar o grafo que ilustra o sistema não linear na Figura 1 verifica-se a existência de uma aresta direta entre S_0 e S_{24} , indicando uma entrada de controle que realiza esta transição diretamente, porém em termos de energia de controle essa entrada é mais custosa em comparação ao caminho que o processo mapeado realiza, confirmando o sucesso da aplicação do caminho ótimo de controle.

No que diz respeito ao controlador LQR puro observa-se na Figura 2 que o mesmo possui uma resposta com menos oscilações e atinge de forma mais rápida seu estado objetivo. Em relação a ação de controle na entrada é possível observar uma variação significativa no início do processo, que no seu decorrer é controlada. O controlador LQR mapeado por grafos exibe uma taxa de oscilação menor, visto que essa é diluída entre as mudanças gradativas de estado até o estado objetivo.

Quando compara-se o controlador puro com a representação por meio de grafos é importante ressaltar alguns pontos. Primeiramente tem-se uma visível diminuição das oscilações das entradas de controle, uma vez que ao representar digitalmente por grafos o processo, a estrutura possui informações de todo o processo de controle para os limites de operação definidos, objetivamente, tem-se um ISU aproximadamente 25% melhor em relação ao LQR puro. A medida de variação quadrática de controle (ISU) pode ser analisada analogamente ao TVC, já que indica dimensões das entradas de controle aplicadas para que o sistema altere seu estado.

4 CONCLUSÕES

Parafraçando o teorema fundamental do cálculo, pelo conceito de derivada, em uma escala suficientemente pequena, toda dinâmica pode ser interpretada como linear.

(...) os teoremas elementares do Cálculo, que, no entanto, são apresentados de uma forma que provavelmente será nova para a maioria dos estudantes. Essa apresentação, que segue rigorosamente a nossa perspectiva geral "geométrica" sobre análise, visa manter-se o mais próximo possível da ideia fundamental do Cálculo, nomeadamente a aproximação "local" das funções por funções lineares. No ensino clássico de Cálculo, a ideia é imediatamente obscurecida pelo facto acidental de que, num espaço vectorial unidimensional, existe uma correspondência de um para um entre formas e números lineares, e por isso a derivada num ponto é definida como um número em vez de uma forma linear. (DIEUDONNE, 2006) (Traduzido)

Os controladores lineares apresentam bom desempenho no ponto de operação para o qual foram projetados.



Porém, sofrem deterioração de desempenho conforme se afastam desse ponto em função das mudanças de dinâmicas do processo. Quanto maior a não linearidade, maior a degradação de desempenho. Tradicionalmente esse problema é tratado pela abordagem de escalonamento de ganhos (*gain scheduling*) em que n controladores são parametrizados para n pontos de operação do processo. Embora essa abordagem seja satisfatória, depende da transição entre pontos de operação e não considera que é possível escolher os caminhos de transição.

Na abordagem de controle mapeado ótimo são resolvidos dois problemas de controle, um global e um local, em combinação. Isso é possível pela representação do processo na forma de um grafo que representa a dinâmica de forma discreta, os vértices são pontos de operação e as arestas as ações de controle que conectam todos os pontos.

O primeiro problema a ser resolvido é o de controle global. Para atingir um ponto de operação objetivo a partir de uma origem, quais são os pontos de operação que devem ser visitados considerando-se uma função custo. Esse problema é resolvido por métodos de caminho ótimo em grafos, como o algoritmo de Dijkstra.

Com a lista de nós a serem visitados surge o problema de controle local, como transitar de um ponto de operação ao próximo vizinho. Esse problema pode ser resolvido por controladores lineares, sintonizados individualmente a cada ponto de operação.

Além do problema de controle, essa abordagem pode responder também características que são difíceis de serem generalizadas para problemas não lineares, como controlabilidade, observabilidade, estabilidade e robustez.

REFERÊNCIAS

- CAMACHO, Eduardo F.; BORDON, Carlos A. **Model Predictive Control**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2007.
- DIEUDONNE, J. **Foundations of Modern Analysis**. [S.l.]: Read Books, 2006. (Pure and applied mathematics, v. 1). ISBN 9781406727913. Disponível em: [🔗](#).
- NISE, Norman S. **Control Systems Engineering**. 7. ed. California State Polytechnic University, Pomona, Califórnia. EUA: Wiley, 2011.
- OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. 2. ed. Cidade: Pearson, 2011. P. 1, 2, 5.
- REIS, Fábio dos. **O que são Estruturas de Dados**. [S.l.: s.n.], 2017.
<http://www.bosontreinamentos.com.br/estruturas-de-dados/estruturas-de-dados/>. Online.
- RIBEIRO, Pedro. **Grafo**. [S.l.: s.n.], 2012.
<https://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/Grafo>. Online.