



# Dinâmica de pulsos ópticos em potenciais com simetria $PT$

## *Dynamics of optical pulses in $PT$ symmetric potentials*

Amanda Claudia Malagi da Silva\*, Antônio Carlos Amaro de Faria Júnior†

### RESUMO

Apresentamos a investigação da dinâmica de pulsos ópticos em dois potenciais com simetria  $PT$ , característica de uma nova classe de Hamiltonianos não-Hermitianos, que descrevem, nesse caso, estruturas ópticas que apresentam comportamento não linear na presença de luz. Buscamos soluções numéricas para a equação de Schrödinger com não linearidade cúbica (efeito *Kerr*), para os potenciais ópticos  $PT$  simétricos propostos. Analisamos também a equação de Schrödinger linear, através da qual construímos as estruturas de banda de condução correspondentes aos potenciais propostos, por meio de um código desenvolvido no software Mathematica. Concluimos que os pulsos ópticos propagados nas estruturas  $PT$  simétricas analisadas, soluções da equação de Schrödinger não linear e, portanto, sólitons ópticos, têm grande potencial de utilização no desenvolvimento de fibras ópticas, por exemplo; também concluimos que as estruturas de banda correspondentes à essas estruturas ópticas são bem definidas, de forma que é possível identificar e selecionar os modos de propagação da luz permitidos.

**Palavras-chave:** sólitons ópticos, simetria  $PT$ , efeito Kerr.

### ABSTRACT

We present the investigation of the optical pulses dynamics in two potentials with  $PT$  symmetry, characteristic of a novel class of non-Hermitian Hamiltonians, which describe, in this case, optical structures that present nonlinear behaviour in the presence of light. We searched numerical solutions of Schrödinger equation with cubic nonlinearity (Kerr effect), for the proposed  $PT$  symmetric optical potentials. We also analysed the linear Schrödinger equation, through which we constructed the conduction band structures corresponding to the proposed potentials, through a code developed in the Mathematica software. We concluded that the propagated optical pulses in the analysed  $PT$  symmetric structures, solutions of nonlinear Schrödinger equation and, therefore, optical solitons, have great potential in the development of optical fibres, for example; we also concluded that the band structures corresponding to these optical structures are well defined, so that is possible to identify and select the allowed light propagation modes.

**Keywords:** optical solitons,  $PT$  symmetry, Kerr effect.

## 1 INTRODUÇÃO

Óptica não linear é o estudo dos fenômenos que ocorrem em decorrência da alteração de propriedades ópticas do meio de propagação devido à presença de luz (BOYD, 1992).

O efeito Kerr – ou efeito de auto-focalização – é um exemplo de fenômeno óptico não linear, associado ao termo de polarização não linear de terceira ordem e é, em essência, responsável pela geração de sólitons ópticos - pulsos ópticos que apresentam baixa perda de energia e baixa dispersão (KIVSHAR e AGRAWAL, 2003). Neste fenômeno não linear, o índice de refração na estrutura óptica é alterado devido à propagação de luz, e passa a ser descrito, em geral, por uma função complexa da posição:  $n(x) = n_0 + n_R(x) + in_I(x)$ , em que  $n_R(x)$  representa o índice de refração do meio e  $n_I(x)$  a distribuição de ganho ou perda óptica (MUSSLIMANI *et al.*, 2008).

Trabalhos recentes relacionados ao estudo da chamada simetria paridade-tempo ( $PT$ ), característica de uma nova classe de Hamiltonianos não-Hermitianos que, ainda assim, apresentam espectros de energia totalmente

\* Licenciatura em Física, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil; [amanda.malaggi@gmail.com](mailto:amanda.malaggi@gmail.com)

† Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Guarapuava; [antoniooc@utfpr.edu.br](mailto:antoniooc@utfpr.edu.br)



reais, exploram essa simetria na descrição de estruturas ópticas que apresentam comportamento não linear (MUSSLIMANI *et al.*, 2008).

Um hamiltoniano é dito  $PT$  simétrico quando é invariante sob ação dos operadores paridade,  $\hat{P}$ , que produz uma reflexão espacial  $\hat{p} \rightarrow -\hat{p}$ ,  $\hat{x} \rightarrow -\hat{x}$ , onde  $\hat{p}$  e  $\hat{x}$  são os operadores momento e posição, respectivamente; e tempo,  $\hat{T}$ , que produz uma inversão temporal:  $\hat{p} \rightarrow -\hat{p}$ ,  $\hat{x} \rightarrow \hat{x}$ ,  $i \rightarrow -i$ . Assim, uma das condições para que um hamiltoniano seja  $PT$  simétrico é que  $V(x) = V^*(-x)$  e, portanto, a parte real do potencial deve ser uma função par da posição, enquanto a parte complexa deve ser uma função ímpar (BENDER e BOETTCHER, 1998).

Nesse sentido, estruturas ópticas não lineares podem exibir características associadas à sistemas  $PT$  simétricos, em que o potencial  $V(x)$  é associado a distribuição complexa do índice de refração do meio. Sendo assim, uma condição imposta pela simetria  $PT$  é que  $n(x) = n^*(-x)$ , ou seja, o índice de refração  $n_R(x)$  na estrutura deve ser uma função par da posição, enquanto a distribuição de ganho ou perda óptica,  $n_I(x)$ , deve ser uma função ímpar (MUSSLIMANI *et al.*, 2008).

Potenciais ópticos que apresentam simetria  $PT$  podem ser utilizados, por exemplo, na projeção de filtros e fibras ópticas, nas quais os modos de propagação da luz podem ser devidamente selecionados, a partir da estrutura de banda de condução associada.

Desse modo, este trabalho propõe-se a responder a seguinte pergunta: quais as características dos pulsos ópticos que propagam-se em determinadas estruturas  $PT$  simétricas, e quais os modos de propagação da luz em tais estruturas? Para isso, o presente trabalho pretende apresentar soluções numéricas que descrevem um pulso óptico propagando-se em guias de onda que apresentam não linearidade cúbica (efeito Kerr), descritos por potenciais ópticos  $PT$  simétricos, e suas respectivas estruturas de banda, que apresentam os modos de propagação da luz.

## 2 MÉTODO

Em geral, um pulso óptico propagando-se em um guia de onda com não linearidade cúbica é descrito pela equação de Schrödinger não linear (MUSSLIMANI *et al.*, 2008):

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + [V(x) + iW(x)]\varphi + |\varphi|^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

onde  $\varphi$  é proporcional ao envelope do campo elétrico e  $z$  é a distância de propagação.

Na Equação (1), o termo não linear (cúbico) está relacionado ao efeito Kerr, enquanto a distribuição complexa,  $PT$  simétrica, do índice de refração do guia de onda está associada ao termo  $V(x) + iW(x)$ . Ademais, a simetria  $PT$ , exibida pela distribuição do índice de refração, implica que  $V(x)$  seja uma função par, enquanto  $W(x)$ , seja uma função ímpar da posição.

As soluções estacionárias não lineares da Equação (1) são escritas da forma:

$$\varphi(x, z) = \phi(x) e^{i\lambda z} \quad (2)$$

em que  $\phi(x)$  é o auto modo não-linear e  $\lambda$  é a respectiva constante de propagação.

Assim, a Equação (2) satisfaz:

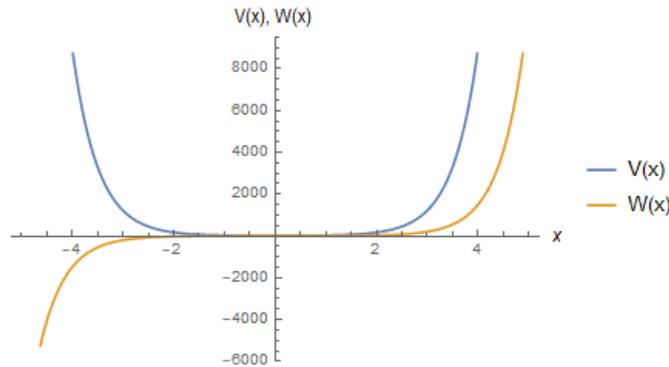
$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + [V(x) + iW(x)]\phi + |\phi|^2 \phi = \lambda \phi \quad (3)$$

Buscou-se soluções numéricas da Equação (3), para dois potenciais  $PT$  simétricos distintos. O primeiro deles, é descrito pela Equação (4):

$$V(x) = \frac{C_1}{2} \cosh^2(x) \text{ e } W(x) = \frac{C_2}{2} \sinh(2x) \quad (4)$$

O perfil deste potencial, com as constantes  $C_1 = 24$  e  $C_2 = 2$ , está representado na Figura (1).

**Figura 1 – Perfil do potencial descrito pela Equação (4)**



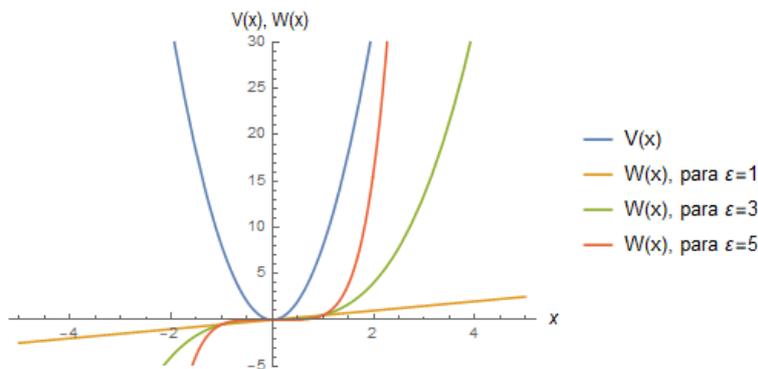
**Fonte: Autor (2021)**

O segundo potencial *PT* simétrico analisado, dependente da variável  $\varepsilon$ , é descrito pela Equação (5):

$$V(x) = \frac{C_1}{2} x^2 \text{ e } W(x) = C_2 x^\varepsilon \quad (5)$$

Os perfis deste potencial, para valores de  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 3$  e  $\varepsilon = 5$  e com as constantes  $C_1 = 16$  e  $C_2 = 0.5$  são exibidos na Figura (2).

**Figura 2 – Perfil do potencial descrito pela Equação (5), com  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 3$  e  $\varepsilon = 5$**



**Fonte: Autor (2021)**

Além da busca pelas soluções numéricas da equação de Schrödinger não linear, analisou-se também o problema linear correspondente, dado pela Equação (6).

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + [V(x) + iW(x)]\varphi = 0 \quad (6)$$

Considerou-se que os potenciais analisados estão relacionados a estruturas ópticas cristalinas periódicas, com período igual à  $\pi$ , de modo que, a partir do teorema de Floquet-Bloch, a solução para a Equação (6) pôde ser escrita da forma:

$$\varphi(x, z) = \phi_k(x) e^{i\beta(k)x} \quad (7)$$

onde  $\phi$  é o auto modo,  $\beta(k)$  é a constante de propagação correspondente e  $k$  é o momento de Bloch. Além disso, os auto modos da Equação (7), obedecem a relação dada pela Equação (8), uma vez que o período da rede cristalina é igual à  $\pi$ .

$$\phi_k(x + \pi) = \phi_k(x) \quad (8)$$

Substituindo-se a Equação (7) na Equação (6), obteve-se:

$$\frac{d^2 \phi_k}{dx^2} + [V(x) + iW(x)] \phi_k = \beta(k) \phi_k \quad (9)$$

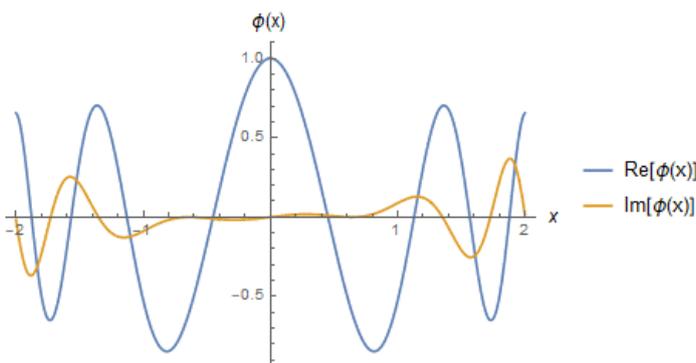
Assim, por meio de uma rotina desenvolvida no software Mathematica, buscou-se, para cada potencial  $PT$  simétrico proposto, as constantes de propagação  $\beta(k)$ , na equação (9), que permaneciam dentro da primeira zona de Brillouin, com  $\kappa$  variando de  $-1$  à  $1$ .

Então, a partir dos valores de  $\beta(k)$  obtidos, construiu-se as estruturas de banda correspondentes à cada potencial estudado, que apresentam os modos de propagação da luz nessas estruturas ópticas.

### 3 RESULTADOS

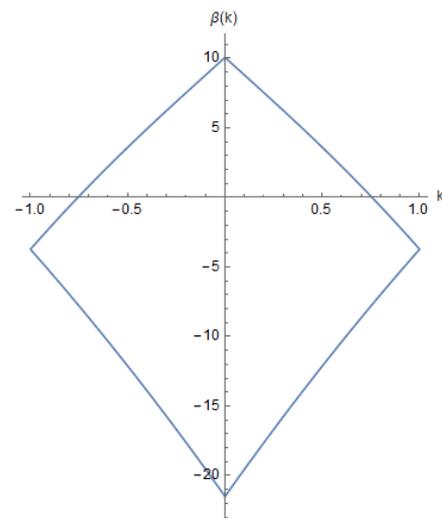
Para o potencial  $PT$  simétrico descrito pela Equação (4), a solução numérica da equação de Schrödinger não linear, Equação (3), com a constante de propagação  $\lambda = 1$ , é exibida na Figura (3). A estrutura de banda correspondente a esse potencial é apresentada na Figura (4).

**Figura 3 – Solução da Equação (3), para o potencial descrito pela Equação (4), com  $\lambda = 1$**



Fonte: Autor (2021)

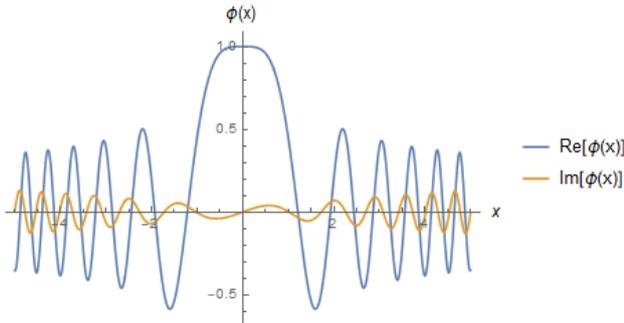
**Figura 4 – Estrutura de banda do potencial descrito pela Equação (4)**



Fonte: Autor (2021)

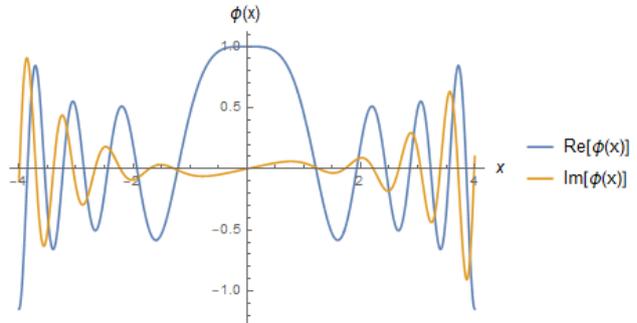
As soluções numéricas encontradas para o potencial descrito pela Equação (5), são exibidas nas figuras (5), (6) e (7) para os valores de  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 3$  e  $\varepsilon = 5$ , respectivamente, e para a constante de propagação  $\lambda = 1$ . Da mesma forma, as estruturas de banda correspondentes a esse potencial, para os valores de  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 3$  e  $\varepsilon = 5$  são apresentados na Figura (8).

**Figura 5 – Solução da Equação (3), para o potencial descrito pela Equação (5), com  $\lambda = 1$  e  $\varepsilon = 1$**



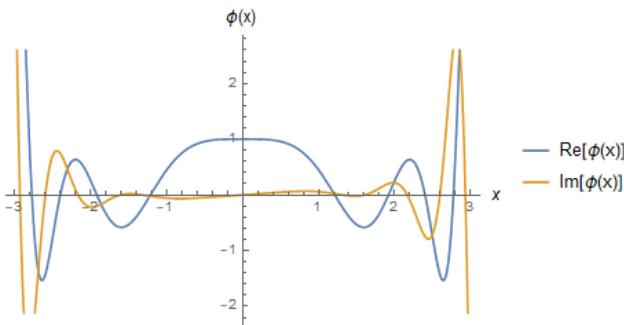
Fonte: Autor (2021)

**Figura 6 – Solução da Equação (3), para o potencial descrito pela Equação (5), com  $\lambda = 1$  e  $\varepsilon = 3$**



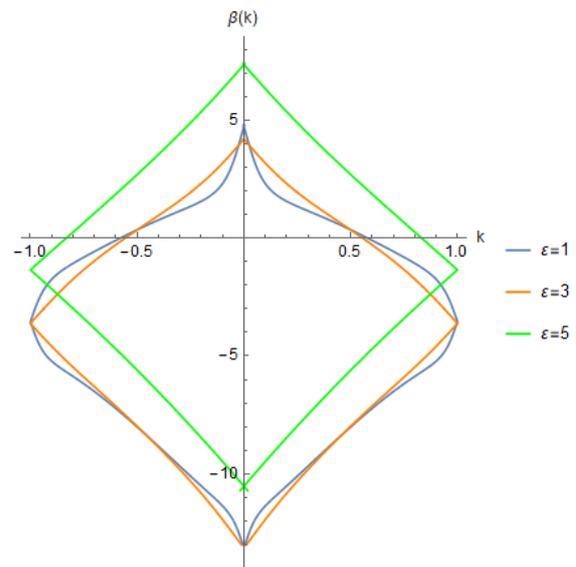
Fonte: Autor (2021)

**Figura 7 – Solução da Equação (3), para o potencial descrito pela Equação (5), com  $\lambda = 1$  e  $\varepsilon = 5$**



Fonte: Autor (2021)

**Figura 8 – Estrutura de banda do potencial descrito pela Equação (5), para  $\varepsilon = 1$  (azul),  $\varepsilon = 3$  (laranja) e  $\varepsilon = 5$  (verde)**



Fonte: Autor (2021)

As soluções da equação de Schrödinger não linear, como as obtidas para os potenciais analisados, são pulsos ópticos que se propagam com baixa dispersão e baixa perda de energia – sólitons ópticos. Já as respectivas estruturas de banda obtidas permitem identificar os modos de propagação permitidos à luz propagada nessas estruturas ópticas.

#### 4 CONCLUSÃO

As soluções da equação de Schrödinger não linear, para os potenciais ópticos *PT* simétricos analisados, descrevem pulsos ópticos propagando-se em guias de onda não lineares. Os índices de refração dessas estruturas são modulados pela propagação da luz, sendo descritos pelos potenciais analisados.



Os pulsos ópticos descritos pelas soluções da equação de Schrödinger, encontradas para os potenciais analisados, apresentam baixa dispersão e baixa perda de energia, mantendo a sua forma durante a propagação, e são conhecidos como solitons ópticos. Devido à tais propriedades, esses pulsos ópticos não lineares têm uma variedade de aplicações em Fotônica e Óptica Integrada como, por exemplo, no desenvolvimento de filtros e fibras ópticas. Ademais, as estruturas de banda relacionadas aos potenciais ópticos analisados são bem definidas, o que permite identificar e selecionar os modos de propagação da luz nestas estruturas.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS

- BENDER, C. M.; BOETTCHER, S. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry. **Physical Review Letters**, v. 80, n. 24, p. 5243, 1998.
- BOYD, R. W. **Nonlinear optics**. Academic press, San Diego, CA, 1992.
- MUSSLIMANI, Z. H. et al. Optical solitons in PT periodic potentials. **Physical Review Letters**, v. 100, n. 3, p. 030402, 2008.
- KIVSHAR, Y. S.; AGRAWAL, G. P. **Optical solitons: from fibers to photonic crystals**. Academic press, 2003.