A paridade da soma de coeficientes binomiais

The parity of sum of binomial coefficients

Débora Ribeiro Valadão (orientado)*,

André Guerino Castoldi (orientador)†

RESUMO

Neste estudo, procurou-se investigar uma generalização da paridade dos coeficientes binomiais, os quais foram muito estudados por importantes matemáticos como Blaise Pascal e François Lucas. Eles colaboraram grandemente para a área de combinatória, Pascal com a representação dos coeficientes binomiais no Triângulo de Pascal e Lucas com o teorema que determina a paridade dos coeficientes binomiais. Para a realização deste trabalho, foi realizada uma pesquisa básica com enfoque exploratório, estudando-se os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do tema e logo após fez-se um levantamento de referências bibliográficas sobre a paridade de coeficientes binomiais e a soma de coeficientes em uma linha do Triângulo de Pascal. A paridade da soma dos coeficientes binomiais em uma linha do Triângulo de Pascal é determinada para classes dos parâmetros em questão. Pode-se perceber uma dificuldade de se encontrar uma fórmula fechada para caracterizar a soma dos coeficientes binomiais em uma linha do Triângulo de Pascal, sendo este um problema que ainda perdura sem uma resolução. Além disso, percebeu-se a grande defasagem de estudo sobre o assunto em artigos e teses realizadas no Brasil.

Palavras-chave: coeficientes binomiais, Triângulo de Pascal, paridade, teorema de Lucas, soma de coeficientes binomiais

ABSTRACT

The present research sought to investigate a generalization of the parity of binomial coefficients, which had been widely studied by important mathematicians such as Blaise Pascal and François Lucas. They contributed greatly to the area of combinatorics, Pascal with the representation of the binomial coefficients in the Pascal Triangle and Lucas with the theorem that determines the parity of the binomial coefficients. To accomplish this paperwork, a basic research with an exploratory focus was carried out, studying the necessary prerequisites for the development of the theme and soon after, a survey of bibliographical references was made about the parity of binomial coefficients and the sum of coefficients in a line of the Pascal Triangle. The parity of the sum of the binomial coefficients in a row of the Pascal Triangle is determined for classes of the parameters in question. One can see a difficulty in finding a closed formula to characterize the sum of the binomial coefficients in a line of the Pascal Triangle, which is a problem that persists without a resolution. Moreover, it was noticed the great gap in the study on this subject in articles and theses carried out in Brazil.

Keywords: binomial coefficients, Pascal Triangle, parity, Lucas' theorem, sum of binomial coefficients

1 INTRODUÇÃO

Sejam n e k números naturais tais que $0 \leq k \leq n$. Os números $\binom{n}{k}$ contam o número de subconjuntos com k elementos distintos, também chamados de k-combinações, de um conjunto com n elementos distintos, e devido a sua aparência no Teorema Binomial recebem a nomenclatura de coeficientes binomiais. Tais

* Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, Paraná, Brasil; deboravaladao@alunos.utfpr.edu.br
† Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Pato Branco; andrecastoldi@utfpr.edu.br

coeficientes possuem diversas propriedades e satisfazem várias identidades e por isso são bastante estudados por matemáticos de todo o mundo. Para uma revisão sobre o tema, o livro Introductory Combinatorics (Brualdi, R. 2004) apresenta propriedades e identidades envolvendo os coeficientes binomiais.

Um matemático importante na determinação de propriedades dos coeficientes binomiais foi o francês Blaise Pascal, que apresentou uma identidade para o cálculo do coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ a partir dos coeficientes $\binom{n-1}{k-1}$ e $\binom{n-1}{k}$. Essa identidade é conhecida como Fórmula de Pascal ou Relação de Stifel. A Fórmula de Pascal permite representar os coeficientes binomiais em um arranjo conhecido como Triângulo de Pascal.

No século XIX, as propriedades aritméticas dos coeficientes binomiais despertaram grande interesse de matemáticos como Gauss, Legendre, Cauchy, entre outros. Dentre as muitas propriedades descobertas sobre os coeficientes binomiais, uma caracterização da paridade dos coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ foi determinada pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas utilizando a representação binária de n e k (Lucas, 1878). Essa caracterização é conhecida como o Teorema de Lucas. Várias generalizações, extensões e aplicações do Teorema de Lucas podem ser encontradas no artigo survey "Lucas' Theorem: Its Generalizations, Extensions and Applications (1878-2014)" (Mestrivic, 2014).

Mais recentemente, as propriedades aritméticas da soma de coeficientes binomiais têm despertado o interesse da comunidade científica. Algumas formas de soma de coeficientes binomiais e suas aplicações são exploradas por Sun (2008). Um resultado amplamente conhecido com base no Triângulo de Pascal é o Teorema das Linhas, que estabelece que a soma de todos os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ da linha n do Triângulo de Pascal é igual a 2^n.

Neste trabalho é abordado uma generalização da paridade dos coeficientes binomiais. Ao se analisar o tema a ser tratado chega-se à seguinte pergunta: Qual é a paridade da soma de coeficientes binomiais consecutivos em uma linha do Triângulo de Pascal? O objetivo principal deste trabalho é estabelecer a paridade da soma de coeficientes binomiais consecutivos em uma linha do Triângulo de Pascal em algumas situações particulares dos parâmetros envolvidos.

A soma de coeficientes binomiais consecutivos na linha n do Triângulo de Pascal é denotada por $\alpha(s,t,n)$ (veja Eq. (5)). De maneira geral, ainda não foi determinada uma fórmula fechada para $\alpha(s,t,n)$. Existem interpretações significativas da paridade dos números $\alpha(s,t,n)$ quando $s=0$ em algumas linhas de pesquisa. Na teoria de informação, $\alpha(0,t,n)$ é um número de palavras de comprimento n com o peso de Hamming menor ou igual a t. Enquanto isso, na geometria discreta, a paridade corresponde ao número máximo de regiões nas quais n hiperplanos dividem R^t, o que pode ser encontrado em Orlik e Terao (2013) e Schlafli (1901, pag 39). Percebe-se com isto, que há diversos tipos de aplicações para o tema e evidencia-se a importância de investigar o mesmo.

2 MÉTODO

Considerando os objetivos dessa pesquisa foi utilizado a natureza de pesquisa básica, pois segundo Lozada (2019, pg 131), esse tipo pesquisa "tem como objetivo principal o avanço do conhecimento científico", com enfoque exploratório, sendo que segundo Lozada (2019) "o intuito da pesquisa exploratória é conhecer profundamente o assunto em questão". A pesquisa se caracteriza como bibliográfica, definida por Lozada (2019) como "a busca de informações, em fontes bibliográficas, que se relacionem ao problema de pesquisa e o fundamentam".

Inicialmente, foi estudado os pré-requisitos necessários ao desenvolvimento do tema, por exemplo, técnicas combinatórias de contagem básicas e avançadas, propriedades sobre os coeficientes binomiais e multinomiais e arranjos combinatórios, sendo que esses arranjos não são muito difundidos na comunidade científica brasileira. Posteriormente, foi feito um levantamento de referências sobre a paridade de coeficientes binomiais e a soma de coeficientes binomiais consecutivos em uma linha do Triângulo de Pascal. A pesquisa se baseou no estudo de tais referências e na obtenção de resultados sobre o tema a partir do referencial teórico estudado.

3 RESULTADOS

Sejam n e k números naturais tais que $0 \leq k \leq n$. Os números $\binom{n}{k}$ contam o número de subconjuntos com k elementos distintos, também chamados de k-combinações, de um conjunto com n elementos distintos, e são determinados pela fórmula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \tag{1}$$

Um matemático francês renomado que estudou os coeficientes binomiais foi Blaise Pascal, o qual apresentou uma importante identidade para os coeficientes binomiais, a Fórmula de Pascal, representada pela Eq. 2, sendo esta definida por:

Proposição 1: (Fórmula de Pascal): Para todo n e k naturais com $1 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{2}$$

Usando essa relação e as informações que $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{n} = 1$ para $n \geq 0$, pode-se calcular os coeficientes binomiais, formando com isso um arranjo conhecido como Triângulo de Pascal, o qual foi apresentado pelo mesmo no Tratado do Triângulo Aritmético (*Traité du triangle arithmétique*), de 1653, e pode ser observado nas Figuras 1 e 2.

Figura 1 - Triângulo de Pascal na forma $\binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\iddots \quad \vdots \quad \ddots \\
\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\cdots\binom{n}{k}
\end{array}$$

Fonte: Autoria Própria (2021)

Figura 2 - Triâgulo de Pascal com valor de $\binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1\ 1 \\
1\ 2\ 1 \\
1\ 3\ 3\ 1 \\
1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\
1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\
\iddots \quad \vdots \quad \ddots
\end{array}$$

Fonte: Autoria Própria (2021)

Além disso, tem-se pelo Triângulo de Pascal um importante teorema, o qual caracteriza o resultado da soma dos coeficientes binomiais presentes na linha n do triângulo, a qual como pode-se perceber na Eq. (3) que resulta em 2^n.

Teorema 1: (Teorema das Linhas) Para todo inteiro $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \tag{3}$$

Outro importante matemático na área de combinatória foi o francês Fraçois Édouard Anatole Lucas, o qual provou um teorema interessante que caracteriza a paridade dos coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ fazendo uso da representação binária de n e k. Lucas (1874) determinou um método para encontrar os coeficientes em módulo p, chegando na Eq. (4), como explicitado por Granville, com o seguinte resultado:

Teorema 2: (Teorema de Lucas) Sejam $n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_s p^s$ e $k = k_0 + k_1 p + \cdots + k_s p^s$ as representações de k e n na base p, respectivamente. Então,

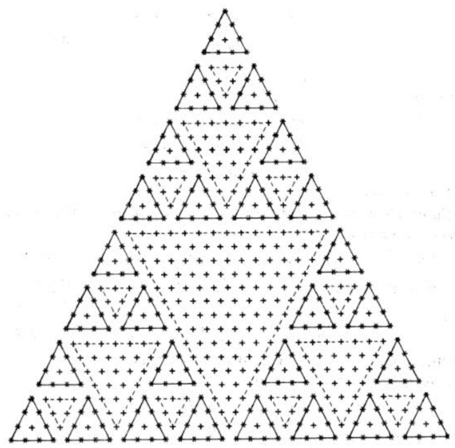
$$\binom{n}{k} = \binom{n_0}{k_0}\binom{n_1}{k_1}\cdots\binom{n_s}{k_s} (mod\ p). \tag{4}$$

No caso binário (módulo 2), vê-se em Yoshiko (2005), que têm-se como consequência do Teorema de Lucas a paridade de coeficientes binomiais. Antes de enunciá-la, são necessárias algumas notações. Seja k um inteiro natural. Denota-se $(k)_2$ a representação de k na base 2, ou seja, a sua representação como um número binário. Por exemplo, se $k = 13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1$, então $(k)_2 = 1101$. Dados dois números naturais k e n, diz-se que $(k)_2 \subseteq (n)_2$ se ao serem comparados dois a dois os dígitos binários de $(k)_2\ e\ (n)_2$, começando pelo dígito mais à direita, cada um de $(k)_2$ é menor ou igual a $(n)_2$. Assim, a paridade dos coeficientes binomiais é caracterizada pelo seguinte resultado.

Teorema 3: (Teorema de Lucas - caso binário): Sejam n e k dois inteiros, $0 \leq k \leq n$. Então $\binom{n}{k}$ é ímpar, se e somente se $(k)_2 \subseteq (n)_2$.

Com o resultado anterior, é possível observar que a paridade dos coeficientes binomiais se comporta como um fractal. Representando cada coeficiente binomial par por uma cruz "+" e cada coeficiente binomial ímpar por um asterisco "*", e substituindo no Triângulo de Pascal, obtém-se a seguinte representação fractal, apresentada por Kung (1976), ilustrada na Figura 3.

Figura 3 - Representação fractal da paridade dos coeficientes binomiais no Triângulo de Pascal.



Fonte: Kung, S. 1976. pg 54

Estabelecidos os resultados sobre a paridade dos coeficientes binomiais, questiona-se se é possível que todos os coeficientes binomiais em uma linha do Triângulo de Pascal tenham a mesma paridade. Observando a Figura 3, tem-se que essa característica acontece em alguns casos. Nessa direção, Fine (1947) demonstrou o seguinte resultado.

Teorema 4: Sejam p um número primo e n um número natural. Uma condição necessária e suficiente para que todo coeficiente binomial $\binom{n}{k}$, $0 < k < n$, seja divisível por p é que n seja uma potência de p.

No caso binário, tem-se que os coeficientes $\binom{n}{k}$, $0 < k < n$, tem a mesma paridade quando n é uma potência de 2. E nesse caso, tais coeficientes são todos pares. No caso em que $n = 2^m - 1$, pelo teorema anterior e a Fórmula de Pascal tem-se que todos os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ são ímpares.

Uma forma de generalizar a paridade dos coeficientes binomiais é investigar a paridade da soma de coeficientes binomiais consecutivos em uma linha do Triângulo de Pascal, ou seja, investigar a paridade dos números:

$$\alpha(s,t,n) = \sum_{k=s}^{t} \binom{n}{k}, \tag{5}$$

onde n é um número natural fixado. Se $k = s = t$, então a Eq. (5) é o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$. O primeiro resultado aborda algumas consequências da Fórmula de Pascal, do Teorema das linhas e do Teorema de Lucas na determinação da paridade de $\alpha(s,t,n)$ em algumas classes de parâmetros (s,t,n).

Proposição 2: (a) Para $n > 0$, o número $\alpha(0,n,n)$ é par;

(b) Para $0 < s < n$, $\alpha(s-1,s,n)$ é ímpar se, e somente se $(s)_2 \subseteq (n+1)_2$.

(c) Se n é ímpar da forma $n = 2t + 1$, então $\alpha(0,t,n)$ é par.

O seguinte resultado juntamente com a Proposição 2 item (a) caracteriza a paridade de $\alpha(s,t,n)$ quando $s = 0$. Esse resultado foi demonstrado em Castoldi et. (2019) utilizando o Teorema Binomial.

Teorema 5: Se $0 < t < n$, então $\alpha(0,t,n) \equiv \binom{n-1}{t} \pmod{2}$. Consequentemente, $\alpha(0,t,n)$ é ímpar se, e somente se $(t)_2 \subseteq (n-1)_2$.

Os resultados seguintes tratam dos casos em que n é uma potência de 2 e uma potência de 2 menos um e são consequência do Teorema 4 particularizado para esses casos.

Teorema 6: Seja n é uma potência de 2.

(a) Se $t < n$, então $\alpha(0,t,n)$ é ímpar.

(b) Se $s > 0$ e $t < n$, então $\alpha(s,t,n)$ é par.

(c) Se $s > 0$, então $\alpha(s,n,n)$ é ímpar.

Teorema 7: Seja $n = 2^m - 1$. Então, $\alpha(s,t,n)$ é par se, e somente se o número de parcelas na soma $\alpha(s,t,n)$ é par.

Sintetizando os resultados anteriores, a paridade de $\alpha(s,t,n)$ foi determinada quando essa soma tem duas parcelas, $n = 2t + 1$ e $s = 0$, $0 < t < n$ e $s = 0$, n é uma potência de 2 e por fim $n = 2^m - 1$.

4 CONCLUSÃO

As pesquisas evidenciam a dificuldade de se encontrar uma fórmula fechada para $\alpha(s,t,n)$ e para a sua paridade, apesar dos inúmeros esforços de pesquisadores da área de combinatória, sendo este um problema que perdura até os dias atuais sem uma resolução. Além disso, é perceptível a defasagem de estudo sobre este tema no Brasil, sendo que é quase que inexistente a chance de se encontrar um artigo ou tese sobre o mesmo em português, assim necessita-se fazer uso de artigos em línguas estrangeiras para se entender um pouco mais a fundo a temática.

O problema de determinar a paridade da soma de coeficientes binomiais consecutivos em uma linha do Triângulo de Pascal não foi resolvido por completo nesse trabalho, porém resultados significativos sobre o tema foram apresentados. Na continuidade da pesquisa sobre o tema pode-se explorar a paridade de $\alpha(s,t,n)$ para outras classes de parâmetros (s,t,n), uma fórmula fechada para $\alpha(s,t,n)$ e outras formas de generalizar a paridade dos coeficientes binomiais.

REFERÊNCIAS

BRUALDI, Richard A. **Introductory Combinatorics**. 4. ed. New Jersey: Pearson, 2004.

CASTOLDI, A.G., CARMELO, E.L.d.M. & DA SILVA, R. **Partial sums of binomials, intersecting numbers, and the excess bound in Rosenbloom–Tsfasman space**. *Comp. Appl. Math.* **38,** 55 (2019). Disponível em:< https://doi.org/10.1007/s40314-019-0828-2>.

FINE, N. J. **Binomial Coefficients Modulo a Prime**. The American Mathematical Monthly, vol. 54, no. 10, 1947, pp. 589–592. JSTOR. Disponível em: <www.jstor.org/stable/2304500>.

GRANVILLE, Andrew. **Arithmetc Properties of Binomial Coefficients I:** Binomial Coefficients modulo prime powers. Introduction. Department of Mathematics, University of Georgia. Disponível em: <http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/granville/paper/binomial/html/node2.html#SECTION00020000000000000000>.

KUNG, L. **Parity triangles of pascal's triangle.** Jacksonville University, Jacksonville, Florida. 1976.

LOZADA, G.; NUNES, K.D.S. **Metodologia Científica**. Porto Alegre: Grupo A, 2019. 9788595029576. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788595029576/>.

LUCAS, François. **Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques suivant un module premier.** Bulletin de la Société Mathématique de France, Tome 6 (1878) , pg. 49-54. Disponível em: <http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__49_1>.

MESTROVIC, R. **Lucas' Theorem:** Its Generalizations, Extensions and Applications (1878–2014). Preprint, 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1409.3820v1>.

ORLIK, P; TERAO, H. Arrangements of hyperplanes, 2013, vol 300. Springer Science & Business Media, Berlin.

SUN Z-W. **On sums of binomial coefficients and their applications**. (2007). Discrete Math. Disponível em:< https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.08.046>

YOSHIKO. **Brincando com Lucas e Pascal.** IME-USP, 2005. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~yw/lic-mat-not-2005/mac110/eps/ep1.pdf>.