https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2018

Estudo de uma variação da heurística Mínimo Grau

Study of a variation of the Minimum Degree heuristic

Priscila Luri Sato
priscilast00@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil
Daniele Costa Silva
danielesilva@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo o estudo de uma variação da heurística de reordenamento de matrizes mínimo grau, visando uma melhora na qualidade da resolução de sistemas lineares com um tempo de processamento equiparável ao das heurísticas de reordenamento mais clássicas. Os impactos desta variação foram analisados utilizando-se sistemas lineares oriundos de métodos de pontos interiores. Para tanto, a mesma foi implementada e inserida em um solver de programação linear possibilitando a execução de testes computacionais com diversos problemas de bibliotecas de problemas de programação linear. Por meio destes testes comparou-se os resultados obtidos com os de heurísticas mais clássicas, Cuthil Mckee Reverso (RCM) e Mínimo Grau. Constatou-se após as análises que a variação estudada se mostrou competitiva com as heurísticas RCM e Mínimo Grau, conhecidas pelos seus bons resultados, em especial na questão da convergência.

PALAVRAS-CHAVE: Mínimo grau. Reordenamento de matrizes. Sistemas Lineares.

ABSTRACT

The project's purpose is to study a variation of the heuristic of matrix reordering Minimum Degree, aiming at an improvement in the quality of the resolution of linear systems with a processing time comparable to that of the more classic reordering heuristics. The impacts of this variation were analyzed using linear systems derived from interior point methods. For this, it was implemented and inserted into a linear programming solver, enabling the execution of computational tests with several problems of libraries of linear programming problems. Through these tests were compared the results obtained with those of more classic heuristics, Cuthil Mckee Reverse (RCM) and Minimum Degree. It was verified after the analysis that the studied variation was competitive with the RCM and Minimum Degree heuristics, known for their good results, especially in the convergence.

KEYWORDS: Minimum degree. Matrix reordering. Linear systems.

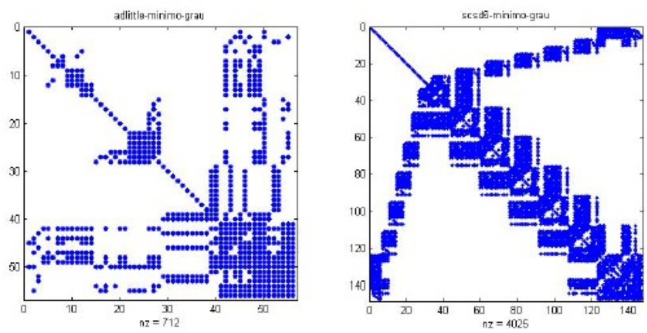
Recebido: 31 ago. 2018.
Aprovado: 04 out. 2018.

INTRODUÇÃO

A resolução de sistemas lineares é imprescindível para muitos problemas das áreas de engenharia e matemática. E muitas vezes pode acarretar em altos custos computacionais, já que em aplicações reais geralmente as matrizes de coeficientes destes sistemas são de grande porte e esparsas. Dentre as várias técnicas de pré-processamento que visam a redução deste custo encontra-se as heurísticas de reordenamento, as quais consistem em permutar linhas e colunas de uma matriz de coeficientes visando a diminuição do preenchimento decorrente de fatorações. O que é benéfico na resolução de sistemas lineares tanto por métodos diretos quanto por métodos iterativos, uma vez que a redução do preenchimento pode implicar na diminuição do armazenamento e do tempo de processamento.

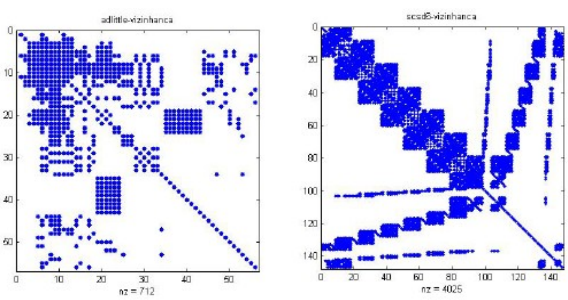
Neste trabalho foi estudada uma variação da heurística Mínimo Grau (GEORGE e LIU, 1980; 1981) denominada heurística da Vizinhança (CAVALHEIRO, 2013). A escolha desta heurística se deu devida a semelhança da estrutura das matrizes após o reordenamento com este método com a das matrizes após o reordenamento com a heurística Mínimo Grau, no entanto de forma espelhada, como é ilustrado nas Figuras 1 e 2.

Figura 1. Estruturas de matrizes após o reordenamento com a heurística Mínimo Grau



Fonte: CAVALHEIRO, 2013

Figura 2. Estruturas de matrizes após o reordenamento com a heurística da Vizinhança



Fonte: CAVALHEIRO, 2013

O que sugere que com as devidas alterações a heurística da Vizinhança possa apresentar resultados tão bons quanto aos da heurística Mínimo Grau, uma das mais eficientes heurísticas de reordenamento de matrizes.

METODOLOGIA

Para a realização deste trabalho foi necessário o estudo de alguns tópicos de teoria de grafos, a relação entre grafos e matrizes e o funcionamento das heurísticas Mínimo Grau e da Vizinhança. Nesta seção são apresentadas brevemente as heurísticas Mínimo Grau e da Vizinhança.

MÍNIMO GRAU

A heurística Mínimo Grau é uma das mais utilizadas para o reordenamento de matrizes e possui como principal objetivo diminuir o preenchimento na fatoração de Cholesky. O critério de eliminação dos vértices parte do princípio de qual possui o menor grau. A cada iteração em que um vértice é removido, caso não haja, cria-se uma aresta entre os vértices vizinhos ao do eliminado ainda.

A seguir o pseudocódigo da heurística mínimo grau.

Entrada: Grafo G com n vértices associado a uma matriz simétrica.

Saída: $y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ vetor para nova ordenação do grafo G.

Para k = 1, 2, ..., n **faça**:

[1] Escolha um vértice v_k de menor grau do grafo.

[2] Retire v_k e as arestas incidentes deste grafo.

[3] Caso não haja, insira uma aresta a cada par de vértices adjacentes a v_k.

[4] y_k = v_k.

VIZINHANÇA

A heurística vizinhança foi baseada na heurística clássica mínimo grau e parte do mesmo princípio na escolha do nó inicial. Em cada iteração, ao se remover um vértice não se cria uma aresta entre os vértices adjacentes e os vizinhos do nó inicial são inseridos em um conjunto *S*. Para a escolha do próximo nó inicial, adiciona-se em um conjunto *VS* todos os vértices vizinhos do conjunto *S*. O vértice do conjunto *VS* que possuir mais vizinhos no conjunto *S* é o escolhido como novo nó inicial.

Na sequência o pseudocódigo da heurística vizinhança.

Entrada: Grafo G com n vértice associado a uma matriz simétrica.

Saída: $y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ vetor para nova ordenação do grafo G.

[1] Escolha um vértice v_k de menor grau do grafo.

Para k = 1, 2, ..., n **faça**:

[2] Adicione no conjunto *S* os vizinhos de v_k que ainda não pertençam ao mesmo.

[3] Retire v_k e as arestas incidentes deste grafo.

[4] Adicione no conjunto *VS* todos os vértices que são vizinhos dos vértices do conjunto *S* que ainda não pertençam a *VS*.

[5] Escolha um vértice $w_k \in VS$ que possua o maior número de vizinhos em *S*.

[6] $y_k = v_k$.

[7] $v_k = w_k$.

RESULTADOS

A heurística da Vizinhança e sua versão invertida, na qual inverte-se a ordem dos elementos do vetor *y* obtido após o reordenamento com a Vizinhança, foram implementar em linguagem C e inseridas no PCs (CZYZYK; MEHROTRA e WRIGHT, 1999) que é um solver de programação linear, desenvolvido no Optimization Technology Center at Argonne National Laboratory and Northewestern University e que originalmente utiliza o método primal-dual preditor-corretor juntamente com a fatoração de Cholesky, para a resolução dos sistemas lineares e a heurística Mínimo Grau para o reordenamento. Além da inserção da heurística da Vizinhança no PCs, também foi inserido um patch da heurística RCM [1] (GEORGE, 1971). Possibilitando a realização de testes computacionais com 117 problemas de diferentes bibliotecas de problemas de programação linear.

A implementação foi testada em uma plataforma Intel Core i7 3,60GHz com memória RAM 58,9GB no sistema operacional Linux. Os resultados destes testes serão apresentados na próxima seção.

Para avaliar o impacto da Vizinhança e da Vizinhança Invertida na resolução de sistemas lineares provenientes do método de pontos interiores preditor correto via fatoração de Cholesky, considerou-se o percentual de densidade do fator de Cholesky, visto que fatores menos densos contribuem para redução de armazenamento e tempo de execução; o tempo total de processamento do PCs para a resolução dos problemas de programação linear, posto que a etapa mais cara computacionalmente deste processo é a resolução dos sistemas lineares e portanto, redução no tempo de execução nesta etapa implica em redução do tempo total; e a convergência, ou seja, problemas que não convergiam para a solução ótima passaram a convergir após o reordenamento e quantos deixaram de convergir após o reordenamento. Além disso, é feita uma comparação com as heurísticas Mínimo Grau e RCM.

Ao analisar os dados referentes a densidade do fator de Cholesky, verifica-se que a heurística da Vizinhança foi competitiva com a RCM tendo resultados melhores ou próximos em 62 casos (52,99%), no entanto não mostrou-se tão competitiva com a Mínimo Grau, com resultados semelhantes em apenas 11 casos (9,40%). Neste quesito a melhor heurística analisada foi a mínimo grau, tendo densidades menores em mais de 90% dos problemas analisados. A Vizinhança ainda se mostrou satisfatória quando comparada do não reordenamento, onde houve uma redução da densidade em 89 problemas (76,06%). Ao analisar os testes realizados com a Vizinhança Invertida, constatou-se que não houveram resultados significativos pois apenas 2 casos (1,70%) foram competitivos com a RCM e apenas 3 casos (2,56%) foram competitivos com a mínimo grau.

1 http://github.com/lpoo/PCx

Em relação ao tempo de processamento total, a Vizinhança foi superior ao não reordenamento em 61 problemas (52,13%), foi competitiva com a RCM em 86 casos (73,50%) e competitiva com a mínimo grau em 73 problemas (62,39%). Já a Vizinhança Invertida, em quase 50% dos casos, foi competitiva com a RCM; tendo também, uma notória competitividade com a Mínimo Grau em 49 problemas (41,88%).

Quanto a convergência, apenas 4 dos problemas passaram a não convergir após o uso do algoritmo da Vizinhança, já no caso da RCM e Mínimo Grau foram de 5 problemas em ambos os casos. O caso com mais falhas foi a Vizinhança Invertida com 18 problemas. A Vizinhança também foi a que apresentou o maior número de problemas (24 problemas) que passaram a convergir, seguida das heurísticas Mínimo Grau (22 problemas), RCM (20 problemas) e Vizinhança Invertida (18 problemas). Neste quesito, destaca-se os problemas DFL001 e QAP12 da biblioteca NETLIB[2], que convergiram apenas com o algoritmo da Vizinhança, e o problema DANO3MIP da coleção MESZAROS[3] que convergiu apenas com as heurísticas Mínimo Grau, Vizinhança e Vizinhança Invertida. Problemas estes de difícil resolução.

CONCLUSÃO

O intuito deste trabalho foi estudar uma variação da heurística mínimo grau com base em um trabalho já existente (CAVALHEIRO, 2013) o qual apresentou resultados promissores. No entanto, conforme os resultados apresentados, a Vizinhança Invertida não apresentou bons resultados conforme esperado, devido a semelhança de forma espelhada entre as matrizes pós reordenamento com a Mínimo Grau e Vizinhança observada em Cavalheiro, 2013. Por outro lado, a Vizinhança se mostrou competitiva com as duas heurísticas mais clássicas de reordenamento, RCM e Mínimo Grau, conhecidas pelos seus bons resultados, em especial na questão da convergência. Como trabalho futuro, pretende-se estudar mais a fundo a questão da convergência aplicando-as em problemas de difícil resolução.

REFERÊNCIAS

CAVALHEIRO, E. M. B. Aplicação de Algoritmos Genéticos no Reordenamento de Matrizes Esparsas. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Sistemas da Informação) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Ponta Porã, 2013.

CZYZYK, J.; MEHROTRA, S.; WAGNER, M.; WRIGHT, S. J. PCx an interior point code for linear programming. Optimization Methods and Software, v. 11, n. 2, p. 397-430, 1999.

GEORGE, J. A. Computer implementation of the finite element method. 1971. Tese (Doutorado) – Department of Computer Science, Stanford University, Stanford, Califórnia, 1971.

2 http://www.netlib.org/ld/data/
3 http://www.sztaki.hu/~meszaros/public_ftp/lptestset/misc

GEORGE, A.; LIU, J. A fast implementation of the degree algorithm using quotient graphs. ACM Transactions on Mathematical Software, v. 6(3), p. 337-358, 1980.

GEORGE, A.; LIU, J. W. H. Computer solution of large sparse positive definite systems. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1981. 324p.