

## Lei do resfriamento de Newton: modelo matemático que governa o resfriamento de uma barra de alumínio

### Newton's cooling law: math model that governs cooling an aluminium bar

#### RESUMO

O estudo apresentado aborda a utilização da lei do resfriamento de Newton, a fim de determinar o tempo de resfriamento de uma barra de alumínio até aproximar-se da temperatura ambiente por meio dos métodos experimental e analítico. Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é estudar, compreender e aplicar a lei do resfriamento de Newton em um problema real, permitindo a comparação entre a solução analítica e os dados experimentais. O experimento foi realizado três vezes, visando minimizar os fatores externos que venham influenciar na obtenção de dados discrepantes do real. Por fim, o modelo foi validado ao verificar que os valores obtidos por meio deste experimento, apresentaram boa aproximação quando comparados com os dados fornecidos pela solução analítica, com erro relativo máximo de aproximadamente 6,09%. Frente a tais resultados, é notável a importância das equações diferenciais ordinárias e sua ampla aplicabilidade em diversos fenômenos que nos cercam.

**PALAVRAS-CHAVE:** Equações diferenciais ordinárias. Resfriamento de um corpo. Coleta de dados. Modelagem matemática. Validação do modelo.

#### ABSTRACT

The presented study deals with the use of the Newton's Cooling Law, in order to determine the cooling time of an aluminum bar until approaching the ambient temperature through the experimental and analytical methods. In this sense, the objective of this work is to study, understand and apply Newton's Cooling Law in a real problem, allowing the comparison between the analytical solution and the experimental data. The experiment was carried out three times, aiming at minimize of external factors that may influence the obtaining of discrepant data from the real. Finally, the model was validated by verifying that the values obtained through this experiment showed a good approximation when compared with the data provided by the analytical solution, with a maximum relative error of approximately 6.09%. Given these results, it is remarkable the importance of ordinary differential equations and their broad applicability in various phenomena that surround us.

**KEYWORDS:** Ordinary differential equations. Cooling of a body. Data collect. Mathematical modeling. Model validation.

**Adriéli Aline Duarte**  
[adri.alineduarte@hotmail.com](mailto:adri.alineduarte@hotmail.com)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

**Jocelaine Cargnelutti**  
[jocelainecargnelutti@gmail.com](mailto:jocelainecargnelutti@gmail.com)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

**Vanderlei Galina**  
[vanderleigalina@gmail.com](mailto:vanderleigalina@gmail.com)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

**Recebido:** 19 ago. 2019.

**Aprovado:** 01 out. 2019.

**Direito autorial:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta a modelagem, resolução analítica e experimental de um problema que envolve o resfriamento de uma barra de alumínio, por meio de equações diferenciais ordinárias (EDO's), governado pela lei do resfriamento de Newton.

Muitas equações que governam os aspectos comportamentais do mundo físico, são relações que envolvem a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Considerando a linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Logo, equações contendo derivadas são equações diferenciais (BOYCE; DIPRIMA, 1998).

O estudo apresentado ao longo deste trabalho é embasado pela lei de resfriamento de Newton, responsável por descrever a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia, sendo que esta é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio à qual o corpo está inserido. Para tanto, a modelagem da equação é realizada de acordo com a singularidade e características do corpo envolvido no problema em estudo (BARIVIERA et al., 2017).

## MATERIAL E MÉTODOS

A realização desse trabalho se iniciou com o estudo bibliográfico sobre a teoria relativa às equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e sobre a lei do resfriamento de Newton, a fim de analisar as técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias adequadas ao problema.

O método desenvolvido por Newton, em 1701, estava baseado no que hoje é conhecido como a lei do resfriamento de Newton, em que a taxa de diminuição da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e o ambiente (BARIVIERA et al., 2017).

Desse modo, modela-se a equação diferencial, conforme Zill e Cullen (2001),

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \quad (1)$$

em que  $k$  é uma constante de proporcionalidade que depende do material do corpo, da massa e da superfície exposta ao ambiente (SILVA, 2014). Como, por hipótese, o corpo está esfriando, devemos ter  $T > T_a$ , logo  $k < 0$ . Observando a Eq. (1), tem-se uma equação diferencial de 1ª ordem e 1º grau de variáveis separáveis, que pode ser escrita como,

$$\frac{dT}{(T - T_a)} = -k dt. \quad (2)$$

Integrando ambos os lados da Eq. (2) e aplicando algumas propriedades segue que,

$$T(t) = T_a + Ce^{-kt}. \quad (3)$$

Para a determinação das constante  $C$  e  $k$  são utilizadas condições de contorno. Desse modo, substituindo  $T(0) = T_0$  na Eq. (3) obtem-se o valor da constante de integração, assim,

$$T(0) = T_a + Ce^{-k \cdot 0}, \quad (4)$$

$$C = T(0) - T_a. \quad (5)$$

Ao substituir-se a Eq. (5) na Eq. (3) obtem-se a solução do problema, de modo que, a temperatura de um corpo em qualquer instante é dada pela função,

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}. \quad (6)$$

Desse modo, com valores de contorno é possível determinar a equação diferencial ordinária que governa o resfriamento de um corpo, em um problema específico.

Neste estudo de caso, o experimento é baseado no monitoramento da temperatura de uma barra de alumínio, que é aquecida pelo vapor da água que passará por seu interior, e na sequência exposto ao ambiente, momento este em que se iniciaram as medições a fim de coletar os dados do sistema. A lei do resfriamento de Newton é utilizada na verificação do resfriamento da barra de alumínio por meio da solução analítica e experimental.

### CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA

Conforme Freire (2005), o calor é o fenômeno no qual uma energia é transferida de um corpo para o outro devido a diferença de temperatura entre eles.

Para o estudo foram necessários alguns instrumentos, sendo estes, uma barra de alumínio, termômetro – TD 801 – Termopar, termômetro infravermelho com mira laser, dilatômetro linear, tubos de silicone, erlenmeyer, lamparina com álcool etílico 70% e um recipiente para recolha da água.

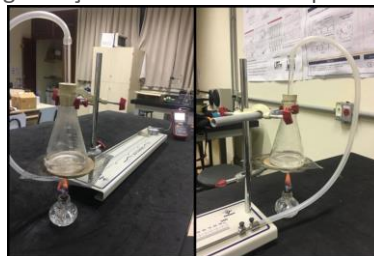
A seguir, nas Figuras 1 e 2, apresentam-se o dilatômetro linear e como o experimento foi realizado.

Figura 1 – Dilatômetro linear



Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 2 – Organização dos instrumentos para o experimento



Fonte: Autoria própria (2019).

Para realização do experimento a barra de alumínio foi fixada ao dilatômetro linear, de modo que, em cada uma de suas extremidades foram presos tubos de silicone. Para aquecer a água, a lamparina com álcool foi disposta abaixo da vidraria

do erlenmeyer. A verificação da temperatura da barra foi realizada por meio do termômetro digital, que estava conectado ao termopar que foi inserido no interior da barra.

A temperatura ambiente foi coletada pelo termômetro infravermelho com mira laser, por meio do qual constatou-se a temperatura de 18,7°C. Quanto ao aquecimento da barra, a chama emitida pela lamparina passou a aquecer a água, até atingir o estado gasoso, momento que a água passa pelo tubo que estava conectado ao erlenmeyer e circula no interior da barra proporcionando o aquecimento.

No momento em que a barra atingiu a temperatura superior a 98,6°C o processo foi interrompido e iniciou-se as medições da temperatura da barra, com intervalos de 1 minuto.

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os dados coletados podem ser observados na Tabela 1, onde estão dispostos o tempo e a temperatura da barra no instante.

Tabela 1 – Dados experimentais da temperatura da barra de metal

| Tempo (minutos) | Temperatura (°C) da barra |
|-----------------|---------------------------|
| 0               | 98,6                      |
| 1               | 83,9                      |
| 2               | 69,5                      |
| 3               | 58,9                      |
| 4               | 50,8                      |
| 5               | 44,7                      |
| 6               | 40,3                      |
| 7               | 37                        |
| 8               | 34,3                      |
| 9               | 32,2                      |
| 10              | 30,5                      |

Fonte: Autoria própria (2019).

De posse dos dados apresentados na Tabela 1, modela-se a equação diferencial que descreve o problema. Para tal, utilizamos o modelo de Newton, conforme apresentado na Eq. (6).

Considerou-se os valores,  $T_a = 18,7$  e  $T_0 = 98,6$ , para se determinar o valor da constante C. Logo, de acordo com a Eq. (5) tem-se,

$$C = 98,6 - 18,7 = 79,9. \tag{7}$$

Substituindo a constante C na Eq. (6), tem-se,

$$T(t) = 18,7 + 79,9e^{-kt}. \tag{8}$$

Assim, basta determinar o valor da constante de proporcionalidade k. De tal forma, considera-se como valor de contorno a temperatura da barra no instante 1, ou seja,  $T(1) = 83,9$ .

Substituindo  $T(1)$  na Eq. (6), obtem-se,

$$k = 0,203316383. \quad (9)$$

Substituindo as constantes C e k, equações (7) e (9), respectivamente, na Eq. (6), obtém-se a equação que modela o resfriamento da barra de alumínio com o passar do tempo, que é dada por,

$$T(t) = 18,7 + 79,9e^{-0,203316383t}. \quad (10)$$

Por meio da Eq. (10), é possível determinar em qual instante a barra atingirá a temperatura ambiente ( $T_a$ ). Para tal, considerou-se  $T(t) = 18,71$ , de onde, obteve-se,

$$t = 44,19686159. \quad (11)$$

Desse modo, a barra de alumínio atingirá a temperatura ambiente, aproximadamente, 56 minutos após ser exposta ao ambiente.

Apresenta-se a Tabela 2, onde estão dispostas as informações referentes a temperatura coletada pelo método experimental e pelo método analítico, além de apresentar o erro relativo obtido na resolução do problema.

Tabela 2 – Relação entre a temperatura obtida por meio do experimento ( $T_e$ ) e a temperatura obtida de forma analítica ( $T_a$ )

| Tempo (minutos) | Temperatura experimental | Temperatura analítica (°C) | Varição ( $T_a - T_e$ ) | Erro relativo ( $(T_a - T_e)/T_a$ ) |
|-----------------|--------------------------|----------------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| 0               | 98,6                     | 98,6                       | 0                       | 0                                   |
| 1               | 83,9                     | 83,9                       | 0                       | 0                                   |
| 2               | 69,5                     | 71,9                       | 2,4                     | 0,0333                              |
| 3               | 58,9                     | 62,1                       | 3,2                     | 0,0515                              |
| 4               | 50,8                     | 54,1                       | 3,3                     | 0,0609                              |
| 5               | 44,8                     | 47,6                       | 2,8                     | 0,0588                              |
| 6               | 40,3                     | 42,3                       | 2                       | 0,0473                              |
| 7               | 37                       | 37,9                       | 0,9                     | 0,0237                              |
| 8               | 34,3                     | 34,4                       | 0,7                     | 0,0203                              |
| 9               | 32,2                     | 31,5                       | 0,7                     | 0,0222                              |
| 10              | 30,5                     | 29,1                       | 1,4                     | 0,0481                              |

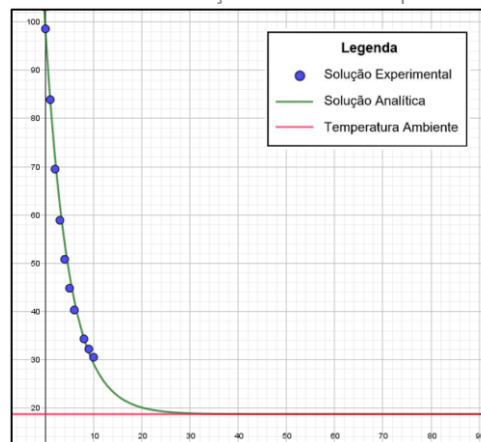
Fonte: Autoria própria (2019).

Observando a Tabela 2, a diferença nos instantes 8 e 9 a diferença é de  $0,7^\circ\text{C}$  e no instante 7 é de  $0,9^\circ\text{C}$ . Verifica-se também que o maior erro relativo é de 0,0609, isto é, um erro de 6,09%, no instante 4, evidenciando a eficiência do modelo.

Contudo, reitera-se que houve o cuidado em diminuir fatores que contribuíssem com margens de erros mais significativas na realização do experimento, como foi o caso do uso do termômetro - TD 801 e o termopar, onde a temperatura era mensurada por meio do contato com o corpo e a temperatura era registrada no termômetro sem necessitar da participação direta do operador em cada instante da medição.

Na Figura 3, apresentam-se os gráficos referentes a solução experimental e analítica do estudo de caso, além da reta que representa a temperatura ambiente. Verificamos que o comportamento dos gráficos referentes ao experimento e ao modelo apresentam a mesma curva, isto é, são representados por uma exponencial.

Figura 3 – Gráficos da solução analítica e experimental



Fonte: Autoria própria (2019).

Contudo, mesmo que se busque amenizar os erros, o erro é passível ao se tratar de fenômenos físicos, logo, tal fato, não anula o mérito do modelo em estudo.

## CONCLUSÃO

A realização desse estudo possibilitou estreitar as relações entre a teoria e a prática, tornando possível a validação de um modelo relativamente simples que apresenta resultados consonantes ao evento real, com percentuais de erro advindos de fatores alheios ao modelo. Nesse sentido, conclui-se que a lei do resfriamento de Newton é, de fato, um modelo matemático que proporciona resultados satisfatórios, mostrando a aplicabilidade da Matemática em outras áreas e sua eficácia em descrever comportamentos de eventos reais.

## REFERÊNCIAS

- BARIVIERA, G. D.; MUMBERGER, G. M.; SANTOS, L. A.; PÁDUA, S. G. B. d. **Lei de resfriamento de Newton: Resolução por edo e método de Euler**. Anais Inovação e Tecnologia, Gestão e Sustentabilidade., v. 03, n. 3, 2017.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais ordinárias e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- FREIRE, M. L. F. **A transferência de calor com o uso de experimentos alternativos**. Scientia Plena, v. 1, n. 8, dez. 2005.
- SILVA, J. S. F. da. **Sobre o problema da variação de temperatura de um corpo**. Connectionline, n. 5, 2014.
- STEWART, J.; **CÁLCULO**, v. 2, 5ª edição. Thomson, São Paulo, 2006.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**, vol. 1. São Paulo, Makron, 2001.