

## Avaliação numérica do fator de concentração de tensão para diferentes geometrias de rebaixo de eixo aplicados em encostos de rolamentos radiais

## Numerical evaluation of stress concentration factor for different designs of shaft shoulder applied to radial bearings housings

### RESUMO

Este trabalho propõe uma metodologia para avaliação numérica de fatores de concentração de tensão em eixos no que diz respeito à aplicação de rolamentos radiais sob três condições de carga pura: tração, flexão e torção. Neste caso, o rebaixo de eixo de filete simples é comparado a duas geometrias de rebaixo estabelecidas em normas técnicas. Uma metodologia numérica foi definida e executada no programa Ansys®. Uma comparação entre os fatores de concentração de tensão para filete simples e geometrias padronizadas é fornecida pela definição de uma medida percentual. Adicionalmente, é mostrado que o uso do filete simples apresenta, em alguns casos, menores fatores de concentração de tensão do que aqueles gerados pelas geometrias propostas em norma.

**PALAVRAS-CHAVE:** Concentração de tensão, rebaixo do eixo, Análise por elementos finitos.

### ABSTRACT

This article proposes a methodology for a numerical evaluation of stress concentration factors in shafts with respect to the application of radial bearings under three conditions of pure load: traction, bending and torsion. In this case, the simple fillet bearing shoulder is compared to two designs established in technical standards. A numerical methodology was defined and carried out in Ansys® software. A comparison between the simple fillet concentration factors and standardized designs is provided by defining a percentual measure. Additionally, it is shown that the use of the simple fillet presents, in some cases, lower stress concentration factors than those generated by the designs proposed on standard.

**KEYWORDS:** Stress concentration, Shaft shoulder, Finite element analyses

**Guilherme Cesar do Amaral Dias**  
Autor  
[guilhermedias@utfpr.alunos.edu.br](mailto:guilhermedias@utfpr.alunos.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil

**João Luiz do Vale**  
[joaovale@utfpr.edu.br](mailto:joaovale@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil

**Jéderson da Silva**  
[jedersonsilva@utfpr.edu.br](mailto:jedersonsilva@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil

**Recebido:** 19 ago. 2019.

**Aprovado:** 01 out. 2019.

**Direito autoral:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

Para um projetista de máquinas, o dimensionamento de eixos é uma tarefa bastante recorrente. Para tanto, diversas considerações devem ser avaliadas, dentre elas, a determinação dos níveis de tensão impostos pelas cargas e, principalmente, a influência que os concentradores de tensão exercem (Allison, 1961; Norton, 2010). Na prática, os elementos de máquinas são frequentemente montados nos eixos através de rebaixos — os quais geram uma boa precisão no posicionamento, porém impõem regiões de concentração de tensão. Análises recentes da literatura relacionadas à avaliação de fatores de concentração de tensão em eixos são apresentadas por Ajovalasit et al. (2014) e Abhyankar e Deshmukh (2017).

Neste contexto, pode-se destacar as demandas para aplicação de rolamentos, cujas posições de montagem em um eixo, são comumente obtidas com rebaixos. Em particular, considerando uma geometria de filete simples e as demandas para a adequada montagem de um arranjo de rolamentos, o maior raio do filete permitido em um ressalto do eixo deve ser menor que o menor raio de aresta do anel interno do rolamento (SKF, 1989). Embora este tipo de geometria de filete apresente, como vantagens, um baixo custo e simplicidade de fabricação, sua restrição geométrica tende a gerar elevados fatores de concentração de tensão (Pilkey e Pilkey, 2008). Como alternativa a utilização da geometria de filete simples, existem algumas opções de geometrias padronizadas, como, por exemplo as estipuladas na norma DIN 509 (1998). Neste ponto, cabe mencionar que há uma lacuna na literatura em relação a apresentação explícita dos valores de concentração de tensão para as geometrias de rebaixo de eixo, propostas na norma DIN 509, considerando diferentes tipos de esforços. Uma alternativa para a avaliação de fatores de concentração de tensão é a utilização de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos, o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos de Fronteira (Ajovalasit et al., 2014).

## OBJETIVOS

Este trabalho teve por objetivo avaliar os valores dos fatores de concentração de tensão de duas geometrias normatizadas de rebaixos de eixo visando aplicação de rolamentos radiais, quando submetidas à esforços puros de tração, flexão e torção. Para tal, é realizada uma comparação com os fatores de concentração de tensão relativos à geometria de filete simples através de uma medida percentual.

## METODOLOGIA

Neste trabalho, o fator de concentração de tensão foi avaliado para três tipos de carga pura: tração, flexão e torção, cujas formulações para determinação da tensão nominal em eixos circulares são apresentadas, respectivamente, na Eq. (1):

$$\sigma_{x_{nom}} = \frac{4F}{\pi d^2}, \quad \sigma_{x_{nom}} = \frac{32M}{\pi d^3}, \quad \tau_{xy_{nom}} = \frac{16T}{\pi d^3}, \quad (1)$$

onde  $\sigma_{xnom}$  representa a tensão nominal para tração e flexão [MPa],  $\tau_{xy nom}$  o esforço nominal de torção [MPa],  $d$  o menor diâmetro do eixo [mm],  $F$  a força de tração [N],  $M$  o momento fletor [Nm] e  $T$  o torque [Nm].

Estas são as cargas mais comuns impostas aos eixos de acordo com a literatura básica (Abhyankar e Deshmukh, 2017). Ademais, tais esforços podem ser combinados aplicando-se o Princípio da Superposição, desde que o material seja mantido dentro do regime elástico (Hibbeler, 2015). Os fatores de concentração de tensão, considerando a formulação clássica (Norton, 2010; Hibbeler, 2015), foram considerados como a razão entre a tensão máxima local e a tensão nominal, como mostrado na Eq. (2):

$$K_{tn} = \frac{\sigma_x}{\sigma_{xnom}}, \quad K_{ts} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy nom}} \quad (2)$$

onde  $K_{tn}$  e  $K_{ts}$  representam, respectivamente, o fator de concentração de tensão para tensão normal e de cisalhamento, ademais,  $\sigma_x$  representa as tensões máximas encontradas para os esforços de tração e flexão enquanto  $\tau_{xy}$  representa a tensão de cisalhamento máxima encontrada para o esforço de torção.

Os fatores de concentração de tensão foram investigados para duas geometrias selecionadas de rebaixo de eixo propostas na norma DIN 509 (1998) (Geometria A e Geometria C), que são mostradas, respectivamente nas Figuras 1(a) e 1(b). Neste caso,  $D$  e  $r$  representam, respectivamente, o maior diâmetro do eixo e o raio do rebaixo. Considera-se aqui que as duas formas adotadas possuem aspectos geométricos representativos de outras geometrias descritas na norma em análise. Além disso, foram realizadas comparações com a geometria de filete simples (Figura 1 (c)).

Figura 1. Geometrias de rebaixo de eixos: (a) Geometria A – DIN 509, (b) Geometria C – DIN 509 e (c) Filete simples.



Fonte: Autoria própria (2019)

A análise numérica foi conduzida mediante a utilização de um modelo tridimensional de elementos finitos considerando elasticidade linear e realizada através do programa Ansys®. Os principais parâmetros de simulação estão resumidos na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros globais de simulação usados para análise.

Parâmetros	Valores
Módulo de Young [MPa]	200000
Coefficiente de Poisson [-]	0,3
Menor Diâmetro(d) [mm]	50
Comprimento do diâmetro interno [mm]	50
Comprimento do eixo [mm]	100
Tipo de elemento finito	Tetrahedron 10 (Tet10 Ansys®)
Tensão nominal [MPa]	100
Condições de contorno aplicadas ao eixo	Fixado na extremidade de maior diâmetro
Variação permitida em von Mises Stress [%]	1
Razão de diâmetros (D/d) [-]	1,09

Fonte: Autoria própria (2019)

Um aspecto relevante na seleção de um tipo de geometria normatizada de encosto de rolamento é saber qual seria o ganho ou a perda em relação ao fator de concentração de tensão obtido pelo filete simples. Para a comparação entre os fatores de concentração de tensão entre as distintas geometrias foi estabelecida uma relação percentual, conforme apresentado na Eq. (3). Vale ressaltar que, com essa fórmula, valores positivos significam aumento da concentração de tensão em relação à geometria do filete simples.

$$1 - \left( \frac{K_{t \text{ filete simples}}}{K_{t \text{ norma}}} \right) [\%]. \quad (3)$$

Para a obtenção dos valores de concentradores de tensão, foi definido um valor arbitrário para a razão entre diâmetros (Tabela 1). Em seguida foram realizadas simulações para a geometria do filete simples, com base nos parâmetros indicados na Tabela 1 e atribuindo os raios apresentados na Tabela 2. Posteriormente, seguindo o mesmo procedimento utilizado para o filete simples, foram obtidos os valores de concentradores de tensão para ambas as geometrias da norma. A Tabela 2 indica os raios atribuídos a cada uma das geometrias propostas. Vale ressaltar que para exposição dos resultados um fator adimensional (r/d) foi proposto com o intuito de possibilitar a comparação entre distintas geometrias.

Tabela 2. Opções de raio propostas.

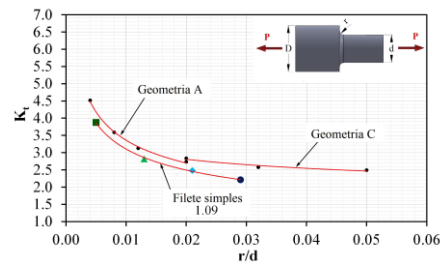
Raios - Geometria de filete simples [mm]	Raios - Geometria A [mm]	Raios - Geometria C [mm]
0,25	0,2	1,0
0,65	0,4	1,6
1,05	0,6	2,5
1,45	1,0	

Fonte: Autoria própria (2019)

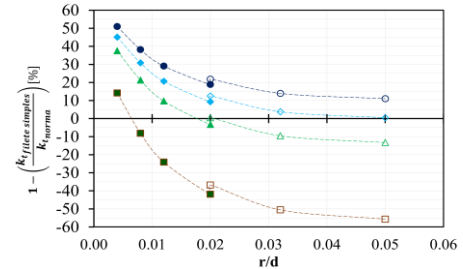
## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 2 apresenta os valores de concentração de tensão obtidos, bem como a relação percentual entre os mesmos. As Figuras 2(a), 2(b) e 2(c), apresentam os valores de concentração de tensão absolutos encontrados para as três geometrias. Em contra partida as Figuras 2(d), 2(e) e 2(f), apresentam os valores relativos percentuais dos concentradores de tensão em relação ao filete simples, como apresentado na Eq. 3. Sendo assim, cada curva para as figuras à direita está associada a um valor de concentração de tensão encontrado para a geometria de filete simples. Marcadores preenchidos representam valores de concentração de tensão relativos aos encontrados para a geometria A (Figura 1(a)), enquanto os demais tem a mesma representação, entretanto para a geometria C (Figura1-(b)).

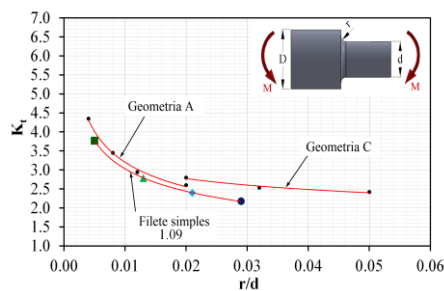
Figura 2. Comparação dos fatores de concentração de tensão entre geometria padrão e filete simples.



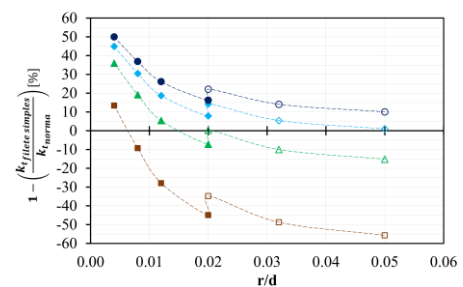
(a) Valores absolutos - Tração



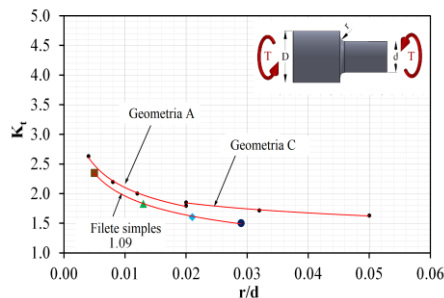
(d) Valores relativos em relação ao filete simples — Tração



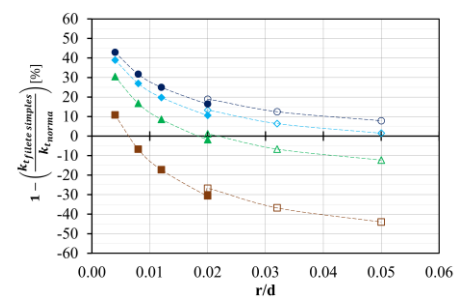
(b) Valores absolutos - Flexão



(e) Valores relativos em relação ao filete simples — Flexão



(c) Valores absolutos - Torção



(f) Valores relativos em relação ao filete simples — Torção

Fonte: Autoria própria (2019)

Avaliando os resultados na Figura 2, observa-se que as geometrias propostas pela norma nem sempre são vantajosas, devido à maioria dos resultados estarem acima do eixo nulo. Acrescenta-se que para a relação  $D/d$  proposta, apenas 33,3% dos fatores de concentração foram benéficos.

Entretanto, nos pontos que possuem propriedades benéficas, ou seja, estão abaixo do eixo nulo, observa-se uma redução dos fatores de concentração chegando a quase 60%. Este resultado é relevante, uma vez que a literatura clássica indica que a aplicação de geometrias de rebaixo sempre teria ganho em relação ao fator de concentração de tensão. Neste caso, o resultado mostra que isso não é válido em todos os casos, e é possível obter casos mais críticos em que a restrição de montagem impõe raios relativamente pequenos para a geometria de filete simples.

## CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo a avaliação numérica de fatores de concentração de tensão em eixos, considerando diferentes geometrias de rebaixos de eixos e aplicação de forças de tração pura, momento fletor e momento de torção. Em particular, dois modelos de geometria de rebaixo, propostos pela norma DIN 509, foram comparados com a geometria de filete simples. As principais contribuições e conclusões foram:

Em relação aos fatores de concentração de tensão para o filete simples, as geometrias A e C tiveram um comportamento análogo, com maiores valores apresentados para força de tração e momento fletor;

Comparativamente, observou-se que, diferente do apontado na literatura, o uso do filete simples, em alguns casos, pode apresentar menores valores de concentração de tensão do que aqueles gerados pelas geometrias A e C.

## REFERÊNCIAS

- ABHYANKAR, A.A. and DESHMUKH, G.P., 2017. **A review paper on stress concentration of shoulder fillet in shaft**. International Journal for Scientific Research & Development, Vol. 4, No. 11, pp. 509–514.
- AJOVALASIT, A., NIGRELLI, V., PITARRESI, G. and MARIOTTI, G.V., 2014. **On the history of torsional stress concentrations in shafts: From electrical analogies to numerical methods**. The Journal of Strain Analysis for Engineering Geometric, Vol. 49, No. 6, pp. 452–466.
- ALLISON, I.M., 1961. **“The elastic stress concentration factors in shouldered shafts. Part I: Shafts subjected to torsion”**. Aeronautical Quarterly, Vol. 12, No. 2, pp. 189–199.
- DIN 509: 1998-06. **Technical drawings – Undercuts – Types and dimensions**.
- HIBBELER, R.C., 2015. **Engineering Mechanics Statics, 13th Edition**.
- NORTON, R.L., 2010. **Machine Geometria An Integrated Approach - Robert L Norton, Prentice Hall**, 4. ed.
- PILKEY, W.D., PILKEY, D.F., 2008. **Peterson’s Stress Concentration Factors**. Wiley Interscience, 3. ed.
- SKF. **General catalogue, 2003**.